X/XI.1 ЛАЗЕР ДВИЖУЩИЙ

Автор неизвестен

1. Условие. В одном из проектов будущего предполагается разгонять маленькие космические корабли мощным лазерным лучом, отправляя их на большие расстояния. До какой скорости можно разогнать идеально зеркальный корабль цилиндрической формы с диаметром основания 1 мм и массой 1 мг оптическим лазером мощностью 1 МВт и расходимостью пучка 5″? Считать, что основание цилиндра ориентировано перпендикулярно лазерному лучу, сам луч при выходе из лазера очень тонкий. Начальной скоростью корабля и гравитационным действием на него всех окрестных тел пренебречь.

1. Решение. Действие лазера на корабль будет несколько по-разному происходить в ближней зоне, когда весь пучок света будет попадать на грань корабля, и в дальней зоне, где корабль будет перехватывать лишь часть пучка. Определим расстояние, на котором размер пучка будет равен размеру корабля:

$$D_0 = d_0 / \rho = 41 \text{ м}.$$

Здесь d_0 - диаметр корабля, ρ - расходимость пучка света лазера, выраженная в радианах. Пока расстояние от корабля меньше, чем D_0, лазер будет создавать постоянную силу светового давления, равную

$$F_0 = 2P / c,$$

где P - мощность лазера, c - скорость света. Множитель 2 появляется из-за зеркальной поверхности аппарата и положения его грани перпендикулярно пучку. В итоге, на расстоянии D_0 аппарат приобретет кинетическую энергию

$$E_0 = F_0 D_0 = \frac{2Pd_0}{\rho c}.$$

Когда аппарат удалится от лазера на большее расстояние D, на него будет действовать лишь часть пучка, доля перекрываемой площади будет убывать как квадрат расстояния. Сила действия составит

$$F = F_0 \frac{D_0^2}{D^2}.$$

Картина аналогична движению в гравитационном поле с той разницей, что сила имеет противоположный знак. При удалении с расстояния D_0 на бесконечность аппарат получит приращение кинетической энергии на величину $\Delta E = F_0 D_0 = E_0$. В итоге, кинетическая энергия аппарата на большом удалении от лазера будет равна $2E_0$. Теперь мы можем найти его скорость:

$$v = \sqrt{\frac{4E_0}{m}} = \sqrt{\frac{8Pd_0}{m\rho c}} \approx 1 \text{ км/с}.$$

1. Система оценивания.

Этап 1 – 1 балл. Представление характера действия лазерного пучка на аппарат, который будет разным в двух зонах по расстоянию, определение границы зон.

При отсутствии такого понимания – использования единой зависимости силы действия пучка на аппарат первый этап не засчитывается, а суммарная оценка за последующие этапы не превышает 2 баллов, см. далее.

Этап 2 – 3 балла. Вычисление кинетической энергии и/или скорости аппарата на границе ближней зоны.

Может выполняться в общем виде или численно. При использовании неверной зависимости силы от расстояния (отличной от константы), вытекающей из решения участника, этап оценивается в 0 баллов.

Вероятная ошибка: отсутствие множителя 2 в выражении для энергии или появление какого-либо иного постоянного множителя. Оценка за этап уменьшается на 1 балл, также влияя на оценку за финальный этап решения.

Этап 3 – 3 балла. Вычисление кинетической энергии аппарата на бесконечном удалении.

Может выполняться в общем виде или численно. При использовании неверной зависимости силы от расстояния (отличной от $\sim 1/D^2$), вытекающей из решения участника, этап оценивается в 0 баллов. Повтор ошибки, связанный с коэффициентом 2, не приводит к уменьшению оценки, если она уже была уменьшена на предыдущем этапе, но влияет на следующий этап.

Этап 4 – 1 балл. Вычисление скорости аппарата на бесконечном удалении.

Засчитывается только при правильном выполнении всех этапов и правильном ответе с точностью до 20%.

X/XI.2 ВЗРЫВ КОМЕТЫ

О.С. Угольников

2. Условие. Ядро слабой кометы располагается в противосолнечной точке неба на расстоянии 1 а.е. от Земли, находясь при этом в перигелии своей параболической орбиты. В этот момент в ядре происходит взрыв, разбивающий его на миллион одинаковых осколков, разлетающихся во все стороны со скоростью до 10 м/с. Вскоре после взрыва комета на короткое время становится видимой на пределе в телескоп с диаметром объектива 8 см. Оцените время, в течение которого комета будет превосходить по своей поверхностной яркости фон неба (21^m с квадратной секунды).

2. Решение. В первое время после взрыва комета остается еще достаточно компактным объектом. Определим предельную звездную величину для точечного объекта при наблюдении в телескоп с диаметром объектива D:

$$m = 6 + 5 \lg (D/d) = 11.$$

Здесь d - диаметр зрачка глаза, который для ночных условий равен примерно 8 мм. Легче всего комету будет видно в небольшой телескоп в тот момент, когда облако осколков расширится ровно настолько, чтобы осколки не затеняли друг друга, но будет еще компактным. Коль скоро комета появилась в телескоп на короткое время, можно судить, что это произошло как раз в описанный выше момент.

После этого комета начинает расширение. Она располагается в перигелии, поэтому в качестве мы можем считать, что ее расстояние от Солнца первое время будет примерно постоянным. Расстояние до Земли может меняться, но это, как известно, не будет влиять на поверхностную яркость протяженного объекта. Поэтому мы можем предположить, что расстояние от кометы до Земли остается постоянным и равно l=1 а.е. Кстати, именно такая ситуация реализуется, если комета обращается вокруг Солнца в плоскости эклиптики в ту же сторону, что и Земля. Тогда ее звездная величина первое время тоже меняться не будет, оставаясь равной 11^m. Определим угловой радиус кометы, при которой ее поверхностная яркость составит 21^m (10^{-4} от полной яркости) с угловой секунды:

$$\rho = \sqrt{10000/\pi}'' = 56'' \approx 1'.$$

Пространственный радиус кометы будет равен $R = l \sin\rho \sim 40$ тыс. км. Нам остается определить, за какое время самые быстрые выброшенные с ядра частицы удалятся от него на такое расстояние:

$$T = R / v = 1.5 \text{ месяца}.$$

В реальности, за это время расстояние кометы от Солнца возрастет с 2 а.е. до 2.07 а.е, что изменит ее поверхностную яркость всего на 0.07^m, а итоговый ответ – на два дня. Поэтому сделанное нами предположение вполне пригодно для решения этой задачи. Остается заметить, что за такое время комета, изначально располагавшаяся в противостоянии с Солнцем в нашем небе, вне зависимости от направления своего движения не успеет оказаться с ним в соединении и скрыться в его лучах (даже при противоположном направлении движения кометы элонгация будет около 90°). В свою очередь, рой частиц еще останется близким к сферическому, не исказившись в ходе движения по орбите.

2. Система оценивания.

Этап 1 - 2 балла. Определение проницающей способности телескопа.
Допускается отклонение ответа от приведенного выше на 1^m, связанного с иной величиной диаметра зрачка глаза (от 6 до 10 мм) и иной предельной звездной величиной для невооруженного глаза (от 5.5 до 6.5^m). Это не влияет на оценку как за этот этап, так и за последующие, где ответы также будут отличаться. Если же отклонение вызвано использованием неверных формул, то этап не засчитывается полностью.

Этап 2 - 1 балл. Указание, что расстояние кометы от Солнца в последующее время практически не будет изменяться.
Это необходимо для корректного выполнения последующих этапов, в частности, анализа поверхностной яркости кометы. Участники могут не делать это предположение и рассчитывать расстояние в соответствии с характером орбиты кометы, в таком случае последующие этапы оцениваются исходя из правильности их выполнения.

Этап 3 - 3 балла. Определение пространственного размера кометы, при котором ее видимая поверхностная яркость совпадет с яркостью фона неба.
Нужно либо указать, что поверхностная яркость не зависит расстояния от Земли, и тогда возможно приводить расчеты к расстоянию 1 а.е., либо проводить вычисления методом, независящим от расстояния. При отсутствии подобного пояснения либо указания, что расстояние от Земли тоже будет практически постоянным, за этап выставляется 2 балла, остальные оцениваются в полной мере.

Этап 4 - 2 балла. Определение искомого времени.
Этап оценивается в 2 балла при условии правильного ответа. Допускаются отклонения, вызванные эффектами, описанными в первом этапе решения.

XI.3 СКВОЗЬ ЗЕМЛЮ

О.С. Угольников

3. Условие. Между полюсами Земли прорыли прямую шахту, из которой был откачан газ. Аппарат, оснащенный надежной термозащитой, был сброшен в эту шахту с поверхности Земли без начальной скорости. Во время пролета через центр Земли аппарат на короткое время включил импульсный двигатель, выбросивший 1/10 полной массы аппарата с относительной скоростью 10 м/с назад вдоль линии движения аппарата. С какой скоростью аппарат вылетит из шахты на противоположном полюсе Земли? Считать Землю однородным по плотности шаром.

3. Решение. Как известно, если аппарат находится внутри сферического тела радиусом R на расстоянии $r<R$ от его центра, то на него будет действовать только притяжение внутренних слоев шара, ограниченных сферой радиуса r. Это позволяет нам записать выражение для вектора ускорения свободного падения аппарата на расстоянии r от центра Земли:

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{4\pi G\rho r^3}{3r^3}\mathbf{r} = -g_0\frac{\mathbf{r}}{R}.$$

Здесь ρ – плотность Земли, g_0 – модуль ускорения свободного падения на ее поверхности. Знак "–" указывает, что ускорение направлено противоположно радиусу–вектору $\mathbf{r}$. Мы получили ни что иное, как уравнение колебаний математического маятника с частотой, равной

$$\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}.$$

Будем считать момент запуска аппарата начальным t=0. Тогда движение аппарата до запуска двигателей будет происходить по гармоническому закону с амплитудой, равной радиусу Земли:

$$r = R\cos\omega t.$$

При достижении центра Земли аппарат будет иметь скорость

$$v_0 = R\omega = \sqrt{g_0 R} = 7.9 \text{ км/с},$$

совпадающую с первой космической скоростью на поверхности Земли. Обозначим начальную массу аппарата как M, массу выброшенного вещества как m, его относительную скорость – как u. Учтем, что $m<<M$ и $u<<v_0$. Приращение скорости аппарата после маневра составляет Δv. Тогда скорость аппарата в середине маневра равна $(v_0+\Delta v/2)$, а средняя скорость выброшенного вещества $v_0+\Delta v/2 - u$. Запишем закон сохранения импульса:

$$(M-m)\,(v_0+\Delta v) + m\,(v_0 + \Delta v/2 - u) = Mv_0.$$

Приращение скорости аппарата после маневра равно

$$\Delta v = u\,\frac{m}{M - m/2} = 1.052 \text{ м/с}.$$

Эта величина с высокой точностью совпадает с результатом, полученным по формуле Циолковского:

$$\Delta v = u \cdot \ln \frac{M}{M-m} = 1.054 \text{ м/с.}$$

Частота пружинного маятника определяется только зависимостью силы от расстояния от точки равновесия, и после маневра она не изменяется. Аппарат вновь движется внутри Земли по гармоническому закону с той же частотой ω, но с большей амплитудой $R+\Delta R$, причем $\Delta R/R=\Delta v/v_0$. Отсюда

$$\Delta R = R\frac{\Delta v}{v_0} = R\frac{u}{v_0}\cdot \ln \frac{M}{M-m} = 0.85 \text{ км.}$$

Обозначив время пролета через центр Земли и маневра как t_0, запишем уравнение его дальнейшего движения:

$$r = (R+\Delta R)\sin \omega(t - t_0).$$

Знак "–" указывает, что аппарат находится в противоположном полушарии относительно точки запуска. Скорость движения аппарата также меняется по гармоническому закону:

$$v = (v_0+\Delta v)\cos \omega(t - t_0).$$

В момент вылета аппарата из шахты на поверхности Земли имеем:

$$\omega(t-t_0) = \arcsin\frac{R}{R+\Delta R};$$

$$v(R) = (v_0+\Delta v)\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+\Delta R}\right)^2} \approx v_0\sqrt{\frac{2\Delta R}{R}} = \sqrt{2\Delta v\cdot v_0} = 129 \text{ м/с.}$$

Ту же величину мы можем получить из закона сохранения энергии, приравняв приращение кинетической энергии единицы массы аппарата при маневре в центре Земли его кинетической энергии при вылете из шахты:

$$v(R) = \sqrt{(v_0+\Delta v)^2 - v_0^2} \approx \sqrt{2\Delta v\cdot v_0} = 129 \text{ м/с.}$$

Скорость аппарата при вылете в сто с лишним раз больше, чем его приращение скорости, полученное в центре Земли! Фактически, аппарат совершил активный гравитационный маневр наподобие того, как делают межпланетные аппараты в поле тяжести больших планет, чтобы затем отправиться в более далекие области Солнечной системы.

3. Система оценивания. Выше приведен только один из возможных способов решения задачи. Ее можно также выполнить, оперируя с величинами энергии, хотя это может потребовать суммирование (интегрирование) по слоям Земли для вычисления потенциальной энергии. Общая структура решения состоит из трех этапов.

Этап 1 – 3 балла. Вычисление скорости у центра Земли до включения двигателей.
Может выполняться численно или в общем виде. При получении выражения для скорости, не эквивалентного первой космической скорости на поверхности, этап не засчитывается. При использовании модели с постоянным ускорением или других неверных моделей этап также не засчитывается вне зависимости от численного ответа.

Этап 2 – 2 балла. Вычисление скорости у центра Земли после маневра.
Этап оценивается полностью как при использовании формулы Циолковского, так и приближения (m / (M – m/2)). При использовании приближений (m/M) или (m/(M–m)),

дающих погрешность около 0.05 м/с в центре Земли и затем 5 м/с при вылете из шахты, выставляется только 1 балл, но остальные этапы оцениваются в полной мере.

Этап 3 – 3 балла. Вычисление скорости после вылета аппарата.
Этап может быть выполнен с помощью закона сохранения энергии, так и на основе формул для колебаний пружинного маятника. Этап не засчитывается полностью при использовании модели с постоянным ускорением или иных неверных физических моделей, вне зависимости от ответа.

Возможная ошибка при решении: скорость при вылете приравнивается к приращению скорости при маневре в центре Земли. Решение оценивается в 2 балла в случае верного расчета этого приращения (см. этап 2) и в 0 баллов во всех остальных случаях.

4. Условие. Полное солнечное затмение произошло 20 марта у восходящего узла орбиты Луны. В пункте **A** центральное затмение наблюдалось на восходе Солнца, полная фаза (между моментами внутренних контактов дисков Луны и Солнца) продлилась ровно 2 минуты. В пункте **B** центральное затмение наступило в местный истинный солнечный полдень, а полная фаза продлилась ровно 3 минуты. Определите широты обоих пунктов. Рельеф Земли и атмосферную рефракцию не учитывать.

4. Решение. Изобразим вид Земли с лунной тенью при таком затмении со стороны Солнца и Луны. Отметим, что коль скоро затмение произошло в равноденствие, скорость точки **A**, связанная с осевым вращением Земли, вне зависимости от ее широты, направлена перпендикулярно плоскости рисунка и, тем самым, перпендикулярно скорости движения тени. Поэтому длительность полной фазы в точке **A** будет определяться только шириной конуса тени:

$$T_A = D_A/v,$$

где v – скорость тени, которая фактически совпадает со скоростью орбитального вращения Луны. Так как Земля 20 марта находится примерно посередине между точками перигелия и афелия своей орбиты, а затмение полное, разумно предположить, что видимый диаметр Луны был близок к максимальному, то есть, Луна располагается вблизи перигея своей орбиты. Тогда ее скорость равна

$$v = \sqrt{\frac{GM}{l_0} \cdot \frac{1+e}{1-e}} = 1.08 \text{ км/с}.$$

Здесь M - масса Земли, l_0 - среднее расстояние Луны от Земли, e - эксцентриситет орбиты Луны. Отсюда мы получаем диаметр тени в точке **A**: D_A =130 км.

На самом деле, данных в условии задачи достаточно, чтобы однозначно установить расстояние от центра Земли до Луны и ее скорость в момент затмения. За счет вариаций эксцентриситета расстояние составляло около 360 тысяч км, а скорость Луны и ее тени была близка к максимальной, 1.09 км/с. Желающие могут ознакомиться с данным выводом, не обязательным для участников олимпиады, в конце решения. Сейчас же вполне достаточно значений, типичных для Луны в перигее своей орбиты.

Обозначим искомую широту точки **B**, где затмение произошло в полдень, как φ_B. Так как дело происходило в равноденствие, высота Солнца и Луны над горизонтом составляла $h = 90° - |\varphi|$. Данная точка находилась ближе к Луне, чем центр Земли (и точка **A**) на величину

$$r = R\sin h = R\cos\varphi.$$

Здесь R – радиус Земли. Угол раствора тени δ равен угловому диаметру Солнца, равному вблизи равноденствия 32.0′ или 0.00931 рад. Это дает нам возможность определить диаметр конуса тени в точке **B**:

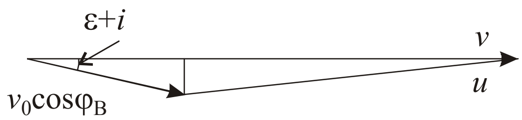
$$D_B = D_A + R\delta\cos\varphi_B = vT_A + R\delta\cos\varphi_B.$$

Во время затмения точка **B** движется за счет осевого вращения Земли со скоростью $v_B = v_0\cos\varphi_B$, где v_0 – экваториальная скорость осевого вращения Земли (0.46 км/с). Эта скорость наклонена к движению тени на угол $\varepsilon + i = 28.6°$ – вспомним, что дело происходило в равноденствие, а Луна располагалась у восходящего узла орбиты.

Вообще говоря, скорость тени по поверхности Земли выражается через теорему косинусов:

$$u = \sqrt{v^2 + v_0^2 \cos^2 \varphi_B - 2vv_0 \cos\varphi_B \cos(\varepsilon + i)}.$$

Дальнейшие вычисления широты φ_B можно вести напрямую с решением соответствующего квадратного уравнения, но это приведет к громоздким выкладкам. Процедура существенно упрощается, если обратить внимание, что величина $v_0\cos\varphi_B$ существенно меньше, чем v: отношение v_0/v составляет 0.43, а широта φ_B достаточно велика, на что указывает небольшая разница длительности полной фазы T_B и T_A. В этом случае мы можем записать выражение для скорости u в первом приближении:



$$u_1 = v - v_0 \cos\varphi_B \cos(\varepsilon + i).$$

Фактически, в этом приближении мы считаем угол между скоростями u и v малым и вместо скорости u находим ее проекцию на линию скорости v. Обозначим приближенное значение искомой широты точки **B**, которое мы найдем в этой модели, как φ_{B1}. Запишем выражение для длительности полной фазы в точке **B**:

$$T_B = \frac{D_B}{v - v_0 \cos\varphi_{B1} \cos(\varepsilon + i)} = \frac{vT_A + R\delta \cos\varphi_{B1}}{v - v_0 \cos\varphi_{B1} \cos(\varepsilon + i)}.$$

Отсюда мы находим приближенное значение широты точки **B**:

$$\varphi_{B1} = \pm \arccos \frac{v(T_B - T_A)}{R\delta + v_0 T_B \cos(\varepsilon + i)} = \pm 60.6^{\circ}.$$

Мы видим, что широта достаточно велика, что оправдывает сделанное выше предположение. Более того, как мы увидим далее, полученное значение достаточно близко к истине и может быть основанием хорошего приближенного решения всего задания. Однако, при желании мы можем получить и более точное значение широты. Возвращаясь к рисунку выше, запишем уточненное выражение для скорости u:

$$u = \sqrt{u_1^2 + v_0^2 \cos^2 \varphi_B \sin^2(\varepsilon + i)} \approx u_1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi_B \sin^2(\varepsilon + i)}{2u_1} = u_1 + \Delta u_1.$$

Поправка к скорости Δu_1 мала, и нам достаточно определить ее, использовав полученное ранее приближенное значение широты φ_{B1}:

$$\Delta u_1 = \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi_{B1} \sin^2(\varepsilon + i)}{2u_1} = 0.02 \text{ км/с}.$$

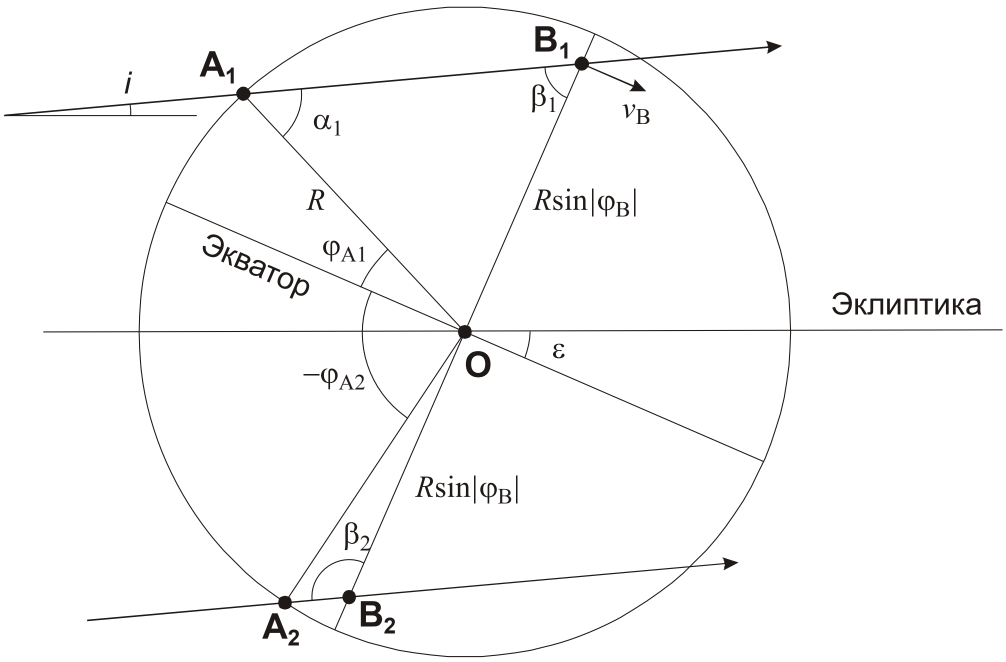
Эта величина существенно меньше самой скорости тени для данной широты u_1 (0.88 км/с). Теперь мы корректируем выражение для длительности полной фазы в точке **B**:

$$T_B = \frac{vT_A + R\delta \cos\varphi_B}{v - v_0 \cos\varphi_B \cos(\varepsilon + i) + \Delta u_1}$$

и получаем уточненное значение широты точки **B**:

$$\varphi_{\text{B}} = \pm\arccos\frac{v(T_{\text{B}} - T_A) + \Delta u_1 T_{\text{B}}}{R\delta + v_0 T_{\text{B}}\cos(\varepsilon + i)} = \pm 58.8^{\circ}.$$

Отметим, что точный анализ скоростей в соответствии с теоремой косинусов дал бы такое же значение широты точки **B** с точностью до десятых долей градуса: ±58.8°. Значения широты с разными знаками определяют положения точек $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$ на рисунке. Каждой из них соответствует своему пути тени и своей точкой $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$, обе эти точки также показаны на этом рисунке.



Для определения широты точек $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ воспользуемся теоремой синусов в треугольнике $\mathbf{OA_1B_1}$ ($\mathbf{OA_2B_2}$). Сторона $\mathbf{OA_{1,2}}$ в нем равна радиусу Земли R, сторона $\mathbf{OB_{1,2}}$ – $R\sin|\varphi_{\text{B}}|$. Для угла при вершине в точке **B** справедливо

$$\beta_1 = 90° - \varepsilon - i;$$
$$\beta_2 = 90° + \varepsilon + i = 180° - \beta_1.$$

Синусы этих углов одинаковы, и запись теоремы синусов для обоих треугольников будет иметь идентичный вид:

$$\frac{\sin\alpha}{R\sin|\varphi_{\text{B}}|} = \frac{\sin\beta}{R}; \quad \frac{\sin\alpha}{\sin|\varphi_{\text{B}}|} = \cos(\varepsilon + i).$$

Отсюда мы получаем значение угла α при точке **A**, одинакового для обоих треугольников:

$$\alpha = \arcsin(\sin|\varphi_B|\cos(\varepsilon + i)) = 48.7^{\circ}.$$

Теперь мы можем найти широты обеих точек $\mathbf{A}_{1,2}$:

$$\varphi_{\text{A}1,2} = \pm\alpha - \varepsilon - i = \arcsin(\sin\varphi_{\text{B}}\cos(\varepsilon + i)) - \varepsilon - i.$$

Численные значения получаются равными +20.1° и –77.3°. Итак, задача имеет два ответа: φ_A=+20.1°, φ_B=+58.8°; φ_A=–77.3°, φ_B=–58.8°.

Затмение, близкое по свойствам к описанному, произошло 25 марта 1838 года в южном полушарии Земли. Оно началось на восходе Солнца на широте –77.9°, полная центральная фаза длилась там 2 минуты 7 секунд. В истинный полдень центральное полное затмение было видно на широте –58.6°, полная фаза длилась при этом 3 минуты 10 секунд.

Комментарий (для ознакомления, необязательный для указания участниками олимпиады). Исходя из данных условия задачи, мы можем определить расстояние до Луны и ее скорость во время затмения. Как уже говорилось, тень Луны представляет собой конус с углом раствора, равным видимому диаметру Солнца δ. Определим длину этого конуса:

$$L = d / \delta = 373400 \text{ км}.$$

Здесь d - диаметр Луны. Сразу обратим внимание, что величина L меньше среднего расстояния от Земли до Луны. Находись Луна на таком расстоянии, полное затмение Солнца на его восходе вообще не могло бы наблюдаться. Но мы его все же видим, его длительность составляет T_A = 120 секунд. Обозначим расстояние до Луны в этот момент как l. Диаметр тени на таком расстоянии будет равен $(L - l)\,\delta$. Скорость осевого вращения Земли в точке **A** направлена к Луне и не влияет на длительность полного затмения. Следовательно, длительность есть отношение диаметра тени в точке **A** к скорости Луны:

$$T_A = \frac{D_A}{v} = \frac{(L-l)\delta}{v}.$$

Ввиду малости эксцентриситета лунной орбиты для скорости Луны в это время выполняется приближенное соотношение:

$$v = v_L \frac{l_0}{l}.$$

Здесь v_L - круговая скорость Луны (1.023 км/с), l_0 - ее среднее расстояние от Земли. Фактически, это выражение закона сохранения момента импульса в предположении, что скорость Луны перпендикулярная радиусу-вектору, а точнее, что синус угла между этими векторами близок к единице. В итоге, мы имеем:

$$T_A = \frac{(L-l)\delta}{v_L} \cdot \frac{l}{l_0}.$$

Мы можем переписать это как квадратное уравнение относительно l:

$$l^2\delta - Ll\delta + v_L l_0 T_A = 0.$$

Физический смысл имеет одно решение этого уравнения (другое будет соответствовать точке рядом с Луной):

$$l = \frac{L\delta + \sqrt{L^2\delta^2 - 4\delta\, v_L l_0 T_A}}{2\delta}.$$

Второе слагаемое в выражении под корнем по модулю значительно меньше первого, в чем можно убедиться численной подстановкой. В этом случае выражение упрощается:

$$l = \frac{L\delta \cdot (2 - 2\delta\, v_{\mathrm{L}} l_0 T_{\mathrm{A}} / L^2 \delta^2)}{2\delta} = L \cdot \left(1 - \frac{v_{\mathrm{L}} l_0 T_{\mathrm{A}}}{L^2 \delta}\right) = 359800 \text{ км.}$$

Отметим, что во время затмения 25 марта 1838 года, описанного выше, расстояние было немногим меньше: около 358000 км. Соответственно, скорость движения Луны по орбите составляет 1.09 км/с. Разница ответов по сравнению с полученными выше не превосходит 1°.

4. Система оценивания.

Этап 1 - 5 баллов. Определение широты точки B.
Вычисление может производиться как точным методом с достаточно громоздкими вычислениями, так и последовательными приближениями, описанными выше. Участник может брать значение скорости движения Луны как для среднего перигея (1.08 км/с), так и пытаться вычислить его (см. комментарии, 1.09 км/с), что несколько скажется на ответе, но не сказывается на оценке.

Возможные методы и ошибки при выполнении этого этапа:
1) Проведение только приближенных вычислений с получением значения широты φ_{B} около 60-61 градуса. При корректном выполнении этап оценивается в 4 балла.
1) Учет только первого из двух факторов, влияющих на увеличение продолжительности затмения - приближения наблюдателя к Луне в точке **B**, что приводит к сохранению в знаменателе формулы для cos φ_{B} только слагаемого $R\delta$. При оставшихся правильных вычислениях участник получит значение косинуса широты чуть больше единицы с выводом, что решения не существует. В этом случае оценка за все решение не превосходит 1 балла. Такая же оценка выставляется в случае возможных ошибок в вычислениях, которые могут привести к существованию ответа, даже если он близок к правильному. При возникновении спорных ситуаций относительно правильности решения члену жюри имеет смысл проверить фактор зависимости ответа от угла наклона экватора к эклиптике (ε) и наклона лунной орбиты к эклиптике (i), которых в случае данного ошибочного решения не будет.
2) Учет только второго из двух факторов, влияющих на увеличение продолжительности затмения - движения наблюдателя в точке **B** за счет осевого вращения Земли, что приводит к сохранению в знаменателе формулы для cos φ_{B} только слагаемого $v_0 T_{\mathrm{B}}\cos(\varepsilon+i)$. При дальнейших правильных вычислениях это даст широту φ_{B} около 27°. Оценка за весь этап составляет 1 балл, последующие оцениваются в полной мере.
3) Учет обоих факторов, но без множителя cos (ε+i) или с множителем cos i во втором слагаемом знаменателя, что эквивалентно предположению, что Луна и ее тень движутся параллельно или под малым углом к экватору Земли. Широта точки **B** в этом случае получается равной ±62.9°. Оценка за весь этап уменьшается на 1 балл, последующие оцениваются в полной мере.
4) Учет обоих факторов, но со множителем cos (ε-i) или cos ε во втором слагаемом знаменателя, что эквивалентно пренебрежению или неправильному учету наклона лунной орбиты к эклиптике. Оценка за весь этап уменьшается на 1 балл, последующие оцениваются в полной мере.
5) В качестве скорости Луны может быть взята ее средняя скорость (1.02 км/с), что приводит к завышенному значению широты (примерно на 2°). В этом случае оценка за первый этап снижается на 1 балл, при этом второй этап в случае правильного выполнения оценивается полностью.
6) Запись ответа только для одного из полушарий Земли. Оценка за этап снижается на 1 балл, следующий этап оценивается частично, за один ответ, см. далее.

7) Получено два значения широт точек **B**, но они не совпадают по модулю. Оценка за этап составляет 0 баллов вне зависимости от правильности хотя бы одного ответа, но последующий этап оценивается в полной мере.

Этап 2 - 3 балла. Определение широты точки А.
Ошибки, сделанные в предыдущей части решения и тем самым меняющие результат и на данном этапе, не влияют на оценку за второй этап, если на первом этапе было получено некоторое значение широты, которое было корректно использовано на втором этапе. Правильное определение широты одной из точек $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ оценивается в 1 балл, обеих – в 3 балла. Если участник считает картины аналогичными и указывает в ответе, что широты одинаковы по величине и противоположны по знаку, то оценка за этап составляет 1 балл, если полученная величина широты совпадает с одной из правильных, и 0 баллов в иных случаях. Ошибка в решении треугольников, приводящая к обоим неверным значениям широты, является основанием для снижения оценки за каждую часть этапа (0 баллов при отсутствии правильных ответов).

Внимание членов жюри! В случае неточного выполнения первого этапа задания и неверных значений широт точек $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$ правильными широтами точек $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ считаются не те, что указаны в данном решении, а те, что получаются в подстановку в последнюю формулу полученных участником неверных значений широт точек **B**.

Возможные ошибки:
1) Только одна пара ответов широт точек **A** и **B** - 1 балл за второй этап (и не более 3 за первый этап).
2) Две пары ответов, где широты точек $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ совпадают по модулю, но различаются знаком: 0 баллов за 2 этап, если среди них нет правильных, и 1 балл, если одна из них верна.
3) Пренебрежение наклоном орбиты Луны к эклиптике или его учет с неверным знаком: 1 балл за весь второй этап, если при этом не сделано иных ошибок. Если же не учтен угол ε, оценка за весь второй этап обнуляется.

Вероятная общая ошибка при решении: точка **B**, в которой затмение наблюдается в полдень, полагается серединой хорды – пути тени по поверхности Земли, то есть точкой наблюдения его наибольшей фазы. Эти точки близки друг к другу только вблизи солнцестояний, что не относится к случаю данной задачи. За первый этап решения выставляется 0 баллов, второй этап оценивается в зависимости от правильности его выполнения: для угла α в этом случае должно получиться соотношение:

$$\alpha = \arcsin(\frac{\sin|\varphi_B|}{\cos(\varepsilon + i)}),$$

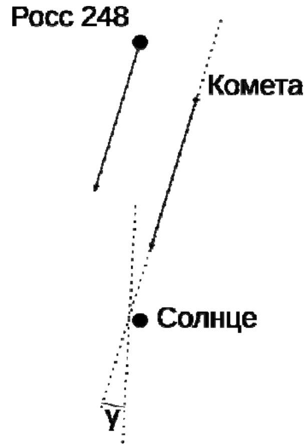
после чего применяется последняя формула из приведенного выше решения. Здесь φ_B – широта точки **B**, найденная участником на первом этапе решения.

X/XI.5 МЕЖЗВЕЗДНАЯ СТРАНИЦА

Е.Н. Фадеев

5. Условие. Комета покинула окрестности звезды Росс 248 по параболической траектории относительно нее и попала в окрестности Солнца, пролетев мимо него на минимальном расстоянии 1 а.е. Какой был эксцентриситет орбиты этой кометы при пролете около Солнца? На какой угол изменится направление скорости кометы после пролета через Солнечную систему? Параметры звезды Росс 248: собственное движение 1.6″/год, лучевая скорость равна -78 км/с, параллакс 0.32″. Влиянием на систему всех иных тел, кроме Солнца и звезды Росс 248, пренебречь.

5. Решение. Вся история наблюдений за кометами, за очень редкими исключениями, свидетельствует о том, что эксцентриситеты орбит комет, навсегда покидающих Солнечную систему, незначительно больше единицы, т. е. кометы улетают по почти параболическим орбитам. Разумно предположить, что если в системе звезды Росс 248 существуют кометы, то свойства их орбит такие же. А значит, улетевшая на большое расстояние от звезды комета будет относительно практически неподвижна относительно этой звезды.



В таком случае комета относительно Солнца будет иметь такую же скорость, что и звезда, а именно:

$$V_C = \sqrt{V_r^2 + \left(4.74\frac{\mu}{\pi}\right)^2} = 81.5\text{ км/с}.$$

Здесь V_r - лучевая скорость звезды, μ - ее собственное движение, π - годичный параллакс. Именно такую скорость имеет комета, издали приближаясь к Солнцу. С другой стороны, в соответствии с законом сохранения энергии, скорость на любом участке гиперболической орбиты равна

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right).$$

Здесь G – гравитационная постоянная, M – Масса Солнца, a – параметр, который по аналогии с эллиптическими орбитами называется большой полуосью орбиты кометы. На бесконечно большом расстоянии

$$V_C^2 = \frac{GM}{a},$$

откуда большая полуось равна $2\cdot10^{10}$ м или 0.134 а.е. Расстояние в перицентре r_p равно 1 а.е. Следовательно, эксцентриситет равен

$$\varepsilon = \frac{r_p}{a} + 1 = \frac{V_C^2}{v_0^2} + 1 \approx 8.49.$$

Здесь v_0 - круговая скорость на расстоянии 1 а.е., близкая к орбитальной скорости Земли. Уравнение асимптот гиперболы можно записать в виде

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

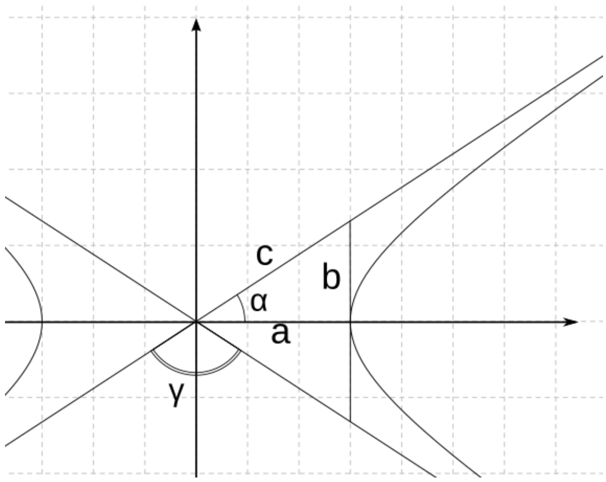
где b – малая полуось гиперболы:

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что угол между асимптотой и осью абсцисс равен

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \mathrm{arctg}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Выражение для угла α можно получить в более простом виде, воспользовавшись известным соотношением для гиперболы $c^2 = a^2+b^2$, где c – фокусное расстояние ($c = a\varepsilon$).



Из рисунка видно, что

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a}{c}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Сам искомый угол поворота равен

$$\gamma = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Таким образом, угол поворота зависит только от эксцентриситета орбиты.

$$\gamma = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 14°.$$

К тому же выводу можно прийти другим путем. Малая полуось гиперболы есть:

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{r_\text{p}^2 + 2r_\text{p}a} = 1.13 \text{ а.е.}$$

и

$$\gamma = 180^\circ - 2\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = 14°.$$

5. Система оценивания.

Этап 1 – 1 балл. Вывод о том, что комета относительно Солнца «на бесконечности» движется со скоростью звезды.

Этап 2 – 1 балл. Вычисление гелиоцентрической скорости кометы на удалении от Солнца.
Скорость может быть определена численно или записана в виде выражения на основе данных о звезде Росс 248. Первые два этапа могут быть выполнены участником слитно в виде одного абзаца или выражения.

Этап 3 – 3 балла. Определение эксцентриситета орбиты.
2 балла выставляются за применение правильной формулы и 1 балл – за верное численное решение. Однако, при величине эксцентриситета e<1 оценка за этап не может превышать 1 балл.

Этап 4 – 3 балла. Определение угла поворота кометы.
2 балла выставляются за применение правильной формулы и 1 балл – за верное численное решение.

Вероятная ошибка при решении: В качестве скорости кометы берется какая-либо величина, не связанная со скоростью звезды. В этом случае не оцениваются первые два этапа, третий этап при условии верного исполнения (для принятой скорости) оценивается полностью, последний этап - не более 2 баллов (нет правильного ответа). Максимальная оценка составляет 5 баллов.

XI.6 СКОПЛЕНИЕ В ПЫЛИ

О.С. Угольников

6. Условие. Рассеянное скопление имеет радиус 10 пк и состоит из звезд, подобных Солнцу, газа и пыли. Расстояние до скопления равно 1 кпк. Газопылевое облако имеет тот же центр и радиус, а оптическая толщина по диаметру равна 100. Звезды, газ и пыль распределены в скоплении однородно. Пылинки черные, их радиус 1 мкм, плотность 1 г/см^3. Массовый вклад пыли составляет 1/100 от вклада газа, газ прозрачен. В земные телескопы в скоплении видно 100 звезд блеском ярче 20^m. Определите, какая доля полной массы скопления содержится в звездах. Межзвездным поглощением вне скопления и волновыми эффектами на пыли пренебречь.

6. Решение. Определим, какую звездную величину имели бы звезды скопления при отсутствии поглощения света пылью:

$$m_0 = m_A - 5 + 5 \lg d = 14.7.$$

Здесь m_A – абсолютная звездная величина звезды, d – расстояние до скопления. В реальности, звезды выглядят слабее. Определим оптическую толщину слоя пыли, при котором звезда будет иметь предельную для указанного в условии телескопа звездную величину m=20:

$$\tau = \ln 10^{0.4(m-m_0)} = 0.4(m-m_0)\cdot \ln 10 = 0.92(m-m_0) \approx 5.$$

Нам известно, что скопление однородное, а его оптическая толщина по диаметру (расстояние $2R$) равна $\tau_0 = 100$. Тогда расстояние сквозь скопление, соответствующее заданной оптической толщине, равно

$$l = 2R\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{R}{10}.$$

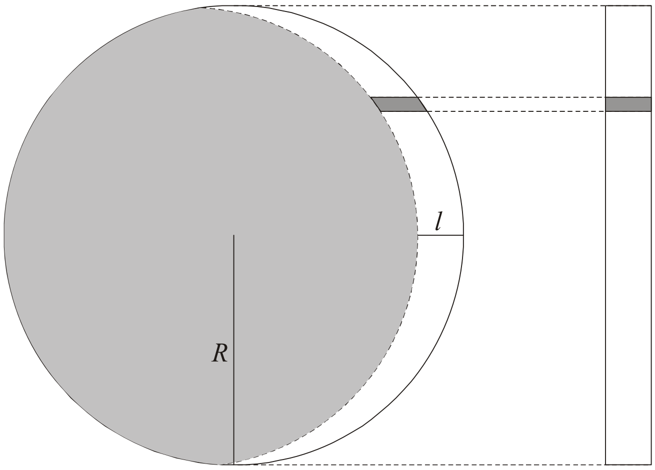
Здесь R – радиус скопления. Получается, что мы видим звезды только в переднем по отношению к нам тонком слое скопления. Форма этого слоя показана на рисунке, он представляет собой область пространства между двумя сферами радиуса R, сдвинутыми друг относительно друга на расстояние l. Как видно на рисунке, с учетом малой толщины этой области, ее объем практически равен объему диска с радиусом R и толщиной l, показанным на рисунке «с ребра». Эффекты на оптически тонких краях скопления незначительны. Обе фигуры можно составить из малых фрагментов одинакового объема, один из которых показан на рисунке темно-серым цветом. Объем данного пространства V, занимаемый видимыми звездами скопления, равен $\pi R^2 l$. К этому же выводу можно прийти несколько более сложным образом, заметив, что пространство есть разница двух сегментов шара одинаковым радиусом R и высотами $(R+l)$ и R.

$$V = \frac{\pi (R+l)^2}{3}(3R-R-l) - \frac{\pi R^2}{3}(3R-R) = \frac{\pi}{3}\left((R+l)^2(2R-l) - R^3\right).$$

С учетом $l \ll R$ мы имеем:

$$V \approx \frac{\pi}{3}\left((R^2+2Rl)^2(2R-l) - r^3\right) \approx \pi R^3 l.$$

Число звезд в данной области N=100. Определим полное число звезд в скоплении:



$$N_0 = N \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\pi R^2 l} = N\frac{4R}{3l} = \frac{40N}{3} \approx 1300.$$

Суммарная масса звезд скопления M_* есть 1300 масс Солнца или $2.6 \cdot 10^{33}$ кг. Найдем теперь концентрацию пылинок n, исходя из их оптической толщины (числа пылинок на луче зрения) по диаметру:

$$\tau_0 = n \cdot \pi r^2 \cdot 2R;$$

$$n = \frac{\tau_0}{2\pi R r^2} = 5.3 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^{-3}.$$

Теперь мы можем определить полное число пылинок

$$N_\text{D} = n \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 6.5 \cdot 10^{48}.$$

и массу пыли в скоплении:

$$M_\text{D} = n \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{8\pi\tau_0 \rho R^2 r}{9} = 2.6 \cdot 10^{34}\ \text{кг}.$$

Масса газа M_G есть $100M_\text{D}$ или $2.6 \cdot 10^{36}$ кг. Теперь мы можем определить массовый вклад звезд в скоплении:

$$\eta_* = \frac{M_*}{M_* + M_\text{D} + M_\text{G}} \approx \frac{M_*}{M_\text{G}} = 0.001.$$

6. Система оценивания. Решение задания разделяется на несколько этапов, которые могут производиться в разном порядке:

Этап 1 – 2 балла. Определение длины *l* – глубины расположения звезды в скоплении по лучу зрения, с которой она может иметь заданную в условии видимую звездную величину.

Этап засчитывается при условии правильного использования формул для видимой звездной величины в данных условиях и правильного соотношения длины l к радиусу скопления R с точностью 10% (т.е. l/R от 0.09 до 0.11). При этом допускается исключение коэффициента 0.92 (приравнивание к единице) и использование приближенного значения абсолютной звездной величины Солнца ($+5^m$), которые не выведут ответ за пределы данного интервала. При больших погрешностях этап не засчитывается. Если отношение l/R оказывается большим единицы или если такое соотношение вытекает из решения участника – оценка ***за все решение*** задания обнуляется.

Возможная ошибка при решении: замена диаметра скопления радиусом, что уменьшает глубину l вдвое. В этом случае этап засчитывается наполовину (1 балл), но последующие этапы (кроме последнего) оцениваются в полной мере.

Этап 2 – 2 балла. Определение объема области скопления, занимаемой видимыми звездами.
Объем может быть определен на основе геометрических рассуждений, приведенных выше, допускается использование численного интегрирования или применения формул для объема сегмента, каждый из способов одинаково верен. 2 балла выставляется в случае правильного понимания типа фигуры и правильного вычисления объема. 1 балл выставляется при правильном понимании типа фигуры и ошибкой вычисления объема менее, чем в 1.5 раза.
Возможная ошибка при решении: неправильное понимание фигуры. Она может быть представлена, как тонкий полусферический слой толщиной l, его объем равен $2\pi R^2 l$, превышая правильный вдвое. Эта фигура может быть также представлена как область между сферой и эллипсоидом (аналогично серпу Луны, только в трехмерном пространстве). Ее объем составляет $2\pi R^2 l/3$, то есть 2/3 от верного. В этих случаях за второй этап решения выставляется 1 балл, но остальные (кроме последнего) оцениваются в полной мере. Если полученный объем превышает объем всего скопления или если такое соотношение вытекает из решения участника – оценка ***за все решение*** задания обнуляется.

Этап 3 – 1 балл. Определение общей массы звезд скопления.
Может выполняться численно или в виде формульных соотношений. Ошибки, сделанные на предыдущих этапах (кроме обнуляющих всю оценку), не влияют за оценку за данный этап.

Этап 4 – 2 балла. Определение массы пыли в скоплении.
Допускается отклонение ответа на 20%, связанное с приближенными вычислениями, при ошибке до 50% оценка уменьшается на 1 балл. Если при вычислении неправильно интерпретируется оптическая толщина (не как число пылинок на луче зрения) или делаются качественные ошибки в формулах – этап не засчитывается.

Этап 5 – 1 балл. Определение массового вклада звезд в скопление.
Засчитывается при правильных вычислениях и правильном ответе. Допускаются погрешности, вызванные оценками величины l на первом этапе, а также неверным представлением фигуры на втором этапе, если их суммарный эффект не превосходит 2 раз.