XXVI Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Самара, 2019 г.

Теоретический тур

IX.1 ЛАЗЕР СЛЕДЯЩИЙ

О.С. Угольников

1. Условие. Искусственный спутник Земли обращается по круговой экваториальной орбите на высоте 500 км над поверхностью Земли в направлении осевого вращения Земли. На нем установлен мощный узконаправленный прожектор, вращающийся так, чтобы держать на луче определенную точку на экваторе Земли всегда, когда это только возможно. Определите длительность каждого сеанса такого освещения, а также угловые скорости прожектора в начале и середине сеанса. Сам спутник не вращается вокруг своей оси, атмосферной рефракцией и поглощением света, а также действием на систему всех других тел пренебречь.

1. Решение. Земля завершает один оборот вокруг своей оси за одни звездные сутки T_0=23.934ч. Скорость движения точки экватора за счет вращения Земли:

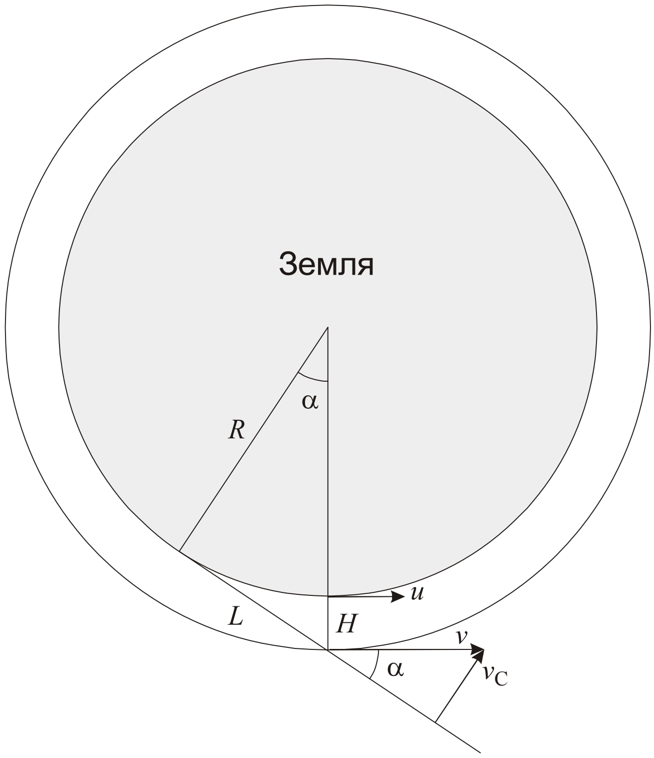
$$u = 2\pi R/T_0 = 0.465 \text{ км/с}$$

(R – экваториальный радиус Земли). Спутник обращается по круговой орбите на высоте H над поверхностью Земли. Определим его период и орбитальную скорость:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+H)^3}{GM}} = 1.577 \text{ час.}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+H}} = 7.613 \text{ км/с.}$$

Здесь M – масса Земли. Изобразим Землю и орбиту спутника на рисунке и определим еще две нужные для решения величины:



Синодический период спутника – период между его пролетами над одной точкой поверхности Земли:

$$S = \frac{T\,T_0}{T_0 - T} = 1.688 \text{ час}.$$

За этот период угол α – разность долгот спутника и точки поверхности – равномерно изменяется на 360°. Определим, при каком максимальном по модулю угле α спутник может направить прожектор на эту точку:

$$\alpha = \arccos\frac{R}{R+H} = 22^{\circ}.$$

Длительность одного сеанса – это время, за которое угол α меняется от –22° до +22°. Она составляет

$$\tau = S \cdot 2\alpha \,/\, 360^\circ = 0.206 \text{ час} = 12.4 \text{ мин}.$$

Нам остается найти угловые скорости. В середине сеанса, когда точка Земли находится прямо под спутником, она будет иметь угловую скорость при наблюдении со спутника:

$$\omega_0 = \frac{v-u}{H} = 0.0143\ c^{-1} = 0.82^{\circ}/c.$$

Такую угловую скорость нужно задать прожектору в середине сеанса, чтобы он мог непрерывно освещать данную точку Земли. В начале и конце сеанса скорость точки Земли направлена к спутнику или от него и на угловую скорость не влияет. Компонента скорости спутника, перпендикулярная направлению на точку Земли, равна

$$v_C = v \sin\alpha = 2.852 \text{ км/с},$$

а расстояние между точкой Земли и спутником

$$L = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} = R\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2575.5 \text{ км.}$$

Угловая скорость прожектора должна быть равна

$$\omega = \frac{v_C}{L} = \frac{v\cos\alpha}{R} = \frac{v}{R+H} = \sqrt{\frac{GM}{(R+H)^3}} = \frac{2\pi}{T} = 0.00111 \text{ с}^{-1} = 0.063^{\circ}/\text{с.}$$

К этому выводу можно было прийти из простых рассуждений: в начале и конце сеанса прожектор должен просто удерживать направление по касательной к экватору Земли, то есть компенсировать угловую скорость движения спутника, вращаясь с той же угловой скоростью в противоположном направлении. Максимальная и минимальная угловая скорости прожектора имеют один знак.

1. Система оценивания.

Этап 1 – 3 балла. Определение длительности сеанса связи.
Выполнение предусматривает определение максимального угла α (2 балла) и синодического периода либо разницы угловых скоростей спутника и Земли (1 балл). Требуемая точность – 1° или 5%. Вместо угла α может определяться соответствующая дуга длины орбиты. В случае ошибки определения длины сеанса вследствие неправильного задания интервала $[0..\alpha]$ вместо $[-\alpha..\alpha]$ оценка за этап уменьшается до 1 балла, но последующие этапы оцениваются в полной мере. Участник олимпиады может использовать среднюю величину радиуса Земли вместо экваториальной, что не является ошибкой.

Этап 2 – 3 балла. Определение угловой скорости в середине интервала.
Вероятная ошибка: угловая скорость определяется как разность угловых скоростей спутника и Земли и оказывается близкой к геоцентрической угловой скорости спутника (0.0012 с^{-1}). В этом случае за этап выставляется 0 баллов. Такая же оценка ставится за любое задание выражения для угловой скорости, приведенное к центру Земли.
Вероятная ошибка: при расчете угловой скорости не учитывается вращение Земли, что приводит к величине v/H=0.015 рад/с или 0.87°/с. Оценка за этап уменьшается на 1 балл.

Этап 3 – 2 балла. Определение угловой скорости в начале и конце интервала.
Возможно как вычисление этой угловой скорости, так и доказательство, что она совпадет с угловой скоростью орбитального вращения спутника. При численном ответе, не совпадающем с угловой скоростью вращения спутника (допустимая погрешность 5%), этап решения не засчитывается.

Возможная ошибка при решении: участник переходит в систему отсчета, вращающуюся с Землей, вращение спутника в ней происходит с меньшей, но постоянной скоростью. Такое решение производить можно, но необходимо учитывать, что сам спутник в этой системе отсчета будет вращаться вокруг своей оси, и при расчете угловой скорости прожектора необходимо сделать соответствующую поправку. Без нее угловая скорость прожектора, в частности, в начале и конце сеанса окажется равной нулю, а угловая скорость в середине сеанса будет несколько меньше правильной. При таком решении первый этап оценивается в зависимости от правильности его выполнения, за второй и третий этап выставляется по 1 баллу в случае отсутствия иных ошибок. Максимальная оценка за все решение – 5 баллов.

IX.2 СЕРП МАЛЫЙ И СЕРП БОЛЬШОЙ

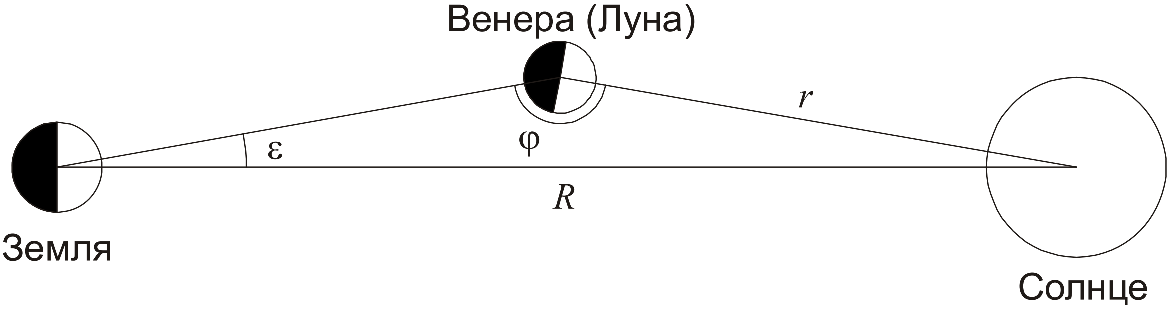
О.С. Угольников

2. Условие. Луна и Венера вступили на небе Земли в тесное соединение, обе при этом видны как тонкие серпы. У кого из них фаза больше и во сколько раз? Атмосферные эффекты увеличения фазы Венеры не учитывать.

2. Решение. Как известно, фаза сферического объекта (доля освещенной части видимого диска или, что тоже самое, его диаметра, перпендикулярного терминатору) равна

$$F = \frac{1+\cos\varphi}{2},$$

где φ - угол с вершиной в объекте, образованный направлениями на Солнце и Землю (фазовый угол). Малая фаза может быть у объекта, расположенного между Солнцем и Землей. Положение этого объекта показано на рисунке.



По условию задачи, Венера и Луна располагаются рядом друг с другом, то есть их угловое удаление от Солнца ε одинаково и невелико. Обозначим расстояние от Солнца до Земли как R, до Венеры (или Луны) как r. Тогда из теоремы синусов для фазового угла имеем:

$$\sin\varphi = \sin\varepsilon\,\frac{R}{r}.$$

Дополнение угла φ до 180° - малая величина. Для таких углов справедливо:

$$\cos\varphi = -\sqrt{1-\sin^2\varphi} \approx -1 + \frac{\sin^2\varphi}{2} = -1 + \frac{\sin^2\varepsilon}{2}\frac{R^2}{r^2}.$$

Фаза объекта составляет

$$F = \frac{\sin^2\varepsilon}{4}\cdot\frac{R^2}{r^2}.$$

Для Луны, расположенной рядом с Землей, отношение $(R/r_M)^2$ фактически равно единице (вблизи новолуния оно равно 1.005), а для Венеры отношение $(R/r_V)^2$ больше единицы. В итоге, фаза Венеры будет больше фазы Луны, и соответствующее отношение составит:

$$\frac{F_V}{F_M} \approx \frac{R^2}{r_V^2} = 1.91.$$

Учет конечности расстояния между Землей и Луной уменьшает эту величину до 1.90. Последнее тесное сближение Луны и Венеры в малых фазах (0.0165 и 0.0314 соответственно), видимое в Европейской части России, произошло вечером 2 января 2014 года. Еще раньше, 21 мая 2004 года, Луна в фазе 0.05 покрыла Венеру в фазе 0.10, явление наблюдалось на светлом вечернем небе на значительной части нашей страны.

2. Система оценивания. Для решения задания нужно выполнить несколько его основных этапов, последовательность которых может быть произвольной.

Этап 1 - 2 балла. Связь фазы и фазового угла.
Как известно, у частично освещенного диска планеты (не в затмении) величины фазы, определяемые через долю освещенного диаметра и освещенной площади, совпадают. Поэтому участник может использовать любое определение фазы, что не влияет на оценку. Этап засчитывается в случае математически правильной записи соотношения. Участник может брать формулу для связи фазы и фазового угла как известную, не выводя ее, этап в этом случае также засчитывается.

При ошибочном выполнении этапа (неверной формуле связи) этап не засчитывается. Однако, если на последующих этапах из формулы получается правильное приближение для случая малых фаз ($\sim R^2/r^2$), то последующие этапы засчитываются. При иных приближениях (например, $\sim R/r$) оценка за следующий этап уменьшается вдвое, последний этап не засчитывается.

Этап 2 - 4 балла. Выражение для фазы в приближении тонкого серпа (объект вблизи линии, соединяющей Солнце и Землю).
В этом выражении наиболее важной является степень зависимости от соотношения расстояний R/r ($\sin\varphi \sim R/r$, $(\cos\varphi + 1) \sim R^2/r^2$). В качестве фазового угла участник может использовать его дополнение до 180 градусов с соответствующей коррекцией формул. Если участник пользуется иной терминологией и обозначениями при решении, его метод необходимо проверить на указанные свойства пропорциональности. В случае их выполнения данный этап оценивается минимум в 2 балла (еще 2 балла - за правильное доказательство пропорциональности и ее коэффициенты). При иной степени оценка за выполнение этапа уменьшается вдвое, последующий этап не засчитывается.

Этап 3 - 2 балла. Вычисление окончательного ответа.
Засчитывается только в случае правильного ответа (с точностью отношения фаз до 10%) при правильном построении решения. Участники могут учесть разность расстояний от Солнца до Земли и Луны, которое изменит ответ с 1.91 до 1.90, но не повлияет на оценку.

Вероятная ошибка при решении: Участник олимпиады может интерпретировать условие, как попадание Солнца, Луны и Венеры на одну линию. Это является грубой ошибкой, при которой итоговая оценка составляет 1 балл при полностью верных (для описанного случая) вычислений и 0 баллов - во всех остальных случаях.

Вероятная ошибка при решении: итоговый ответ каким-либо образом зависит от линейных размеров Луны или Венеры. К этому же случаю относится ответ, в который радиусы Луны и Венеры не входят в явном виде, но который бы численно изменился, если бы физические размеры Луны и Венеры были бы иными. Такое решение не может быть оценено выше 1 балла.

Вероятная ошибка при решении: вместо соотношения фаз участник вычисляет соотношение видимых диаметров Луны и Венеры. Итоговая оценка составляет 0 баллов.

IX/X.3 ВНУТРИ ГАЛАКТИКИ

О.С. Угольников

3. Условие. Эллиптическая галактика типа E0 (шарообразная форма) на 20% по массе состоит из звезд солнечного типа и на 80% - из темной материи. Плотность обеих составляющих постоянна на всем объеме галактики. Некоторая звезда движется по замкнутой траектории внутри галактики, не вылетая за ее пределы, с периодом 100 миллионов лет. Сколько всего звезд было бы видно невооруженным глазом в небе обитаемой планеты, обращающейся вокруг этой звезды? Тесные сближения с другими звездами не учитывать.

3. Решение. Как известно, для сферического однородного массивного тела выполняется свойство: на материальную точку, расположенную внутри нее, действует притяжение всех частей тела, расположенных ближе к центру, нежели эта точка, а действие внешних слоев компенсируется. Таким образом, на тело, расположенное на расстоянии r от центра, будет действовать ускорение тяготения:

$$g = -\frac{4\pi G\rho r}{3}.$$

Знак "–" означает, что ускорение направлено к центру, противоположно радиусу-вектору **r**. Мы получили уравнение, похожее на уравнение пружинного маятника, возвращающая сила которого противоположна по знаку и пропорциональна по величине смещению груза маятника относительно равновесного положения: $a = -\omega^2 r$, здесь ω – частота колебаний маятника. В таком поле тяжести звезда будет совершать движение с постоянным периодом, не зависящим от начального положения. Колебания могут происходить и в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, и тогда звезда будет описывать эллипс, но центр галактики будет уже не в фокусе, а в центре этого эллипса. Период колебаний будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}.$$

Отсюда мы получаем соотношение для полной плотности галактики:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} = 1.4\cdot 10^{-20}\ \text{кг/м}^3.$$

Учтем далее, что на звезды приходится лишь доля η (0.2) от этой плотности и найдем концентрацию звезд солнечного типа в этой галактике n:

$$\rho\cdot\eta = n\cdot M;\quad n = \frac{\rho\cdot\eta}{M} = \frac{3\pi\eta}{GMT^2} = 1.4\cdot 10^{-51}\ \text{м}^{-3} = 0.041\,\text{пк}^{-3}.$$

Здесь M - масса Солнца. Определим, с какого расстояния r_0 Солнце, имеющее абсолютную звездную величину m_0 (+4.7) будет выглядеть как звезда с m=+6:

$$\lg r_0 = \frac{m - m_0}{5} + 1;\quad r_0 = 18.2\ \text{пк}.$$

Искомое число звезд есть их число внутри сферы с найденным радиусом:

$$N = \frac{4\pi n r_0^3}{3} \approx 1000.$$

3. Система оценивания.

Этап 1 - 3 балла. Установление связи между периодом вращения звезды и плотностью галактики, определение плотности.
Участники могут идти путем, описанным выше, и в этом случае этап при условии правильного выполнения оценивается полностью (3 балла). Они могут предположить, что орбита звезды круговая и произвести расчет по стандартным формулам небесной механики, учитывая только внутреннюю часть галактики. Тогда за этап выставляется 2 балла, но последующие этапы оцениваются в полной мере.

Этап 2 - 2 балла. Определение концентрации звезд в галактике.
Требуемая точность 10%.
Вероятная ошибка при решении: участник забывает о темной материи, завышая концентрацию звезд в 5 раз. В этом случае не засчитывается данный этап, а также финальный этап (запись ответа).

Этап 3 - 2 балла. Нахождение максимального расстояния до звезды, видимой невооруженным глазом.
В качестве предельной звездной величины для невооруженного глаза могут браться значения от 5.5^m до 6.5^m, что не является ошибкой. В остальных расчетах точность должна быть не хуже 10%.

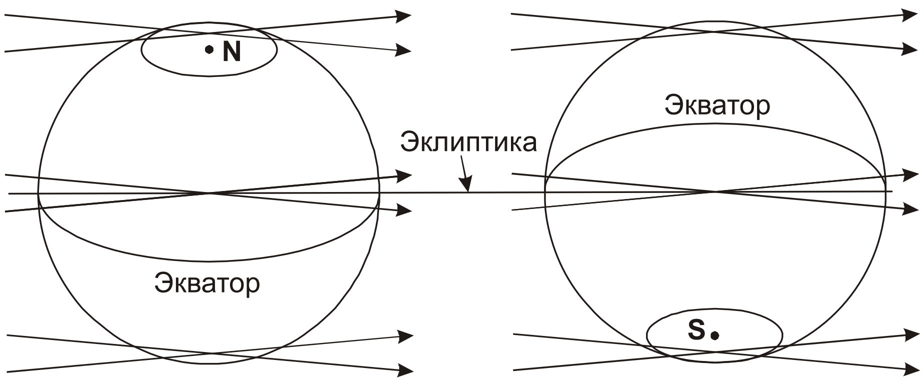
Этап 4 - 1 балл. Определение числа звезд, видимых в небе планеты.
Засчитывается в случае правильных выполнений предыдущих этапов. Отличие ответа от приведенного выше может быть вызвано только другим заданием предельной звездной величины на этапе 3, во всех остальных случаях при отклонениях ответа более, чем на 20%, этап не засчитывается. Участники могут найти число звезд, видимых в один момент с одной точки поверхности планеты и получить число около 500, что также засчитывается при условии соответствующего описания найденной величины.

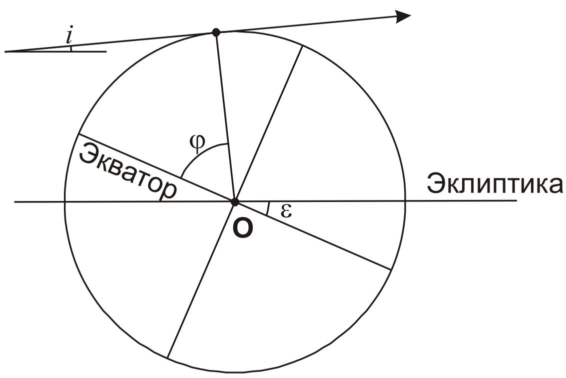
Вероятная ошибка при решении: попытка учета межзвездного поглощения света в галактике, которое при описанном условии отсутствует. Оценка определяется точностью выполнения всех этапов и далее уменьшается на 2 балла.

А.Н. Акиньщиков

4. Условие. В каких широтах лунная тень во время солнечного затмения может двигаться по поверхности Земли точно с запада на восток, и в каких – точно с востока на запад? Атмосферной рефракцией и рельефом Земли пренебречь.

4. Решение. Луна движется по орбите вокруг Земли против часовой стрелки (если смотреть с северной стороны) и при полном солнечном затмении ее тень движется по поверхности Земли обычно от утреннего полушария к вечернему. На рисунке показаны примеры движения тени Луны во время летнего и зимнего солнцестояния. Направление движения тени наклонено к плоскости эклиптики на малый угол (около 5°). В зависимости от сезона, когда наблюдается затмение, для любой широты от северного до южного полюса тень Луны в какой–то точке Земли может двигаться точно вдоль параллели, с запада на восток.

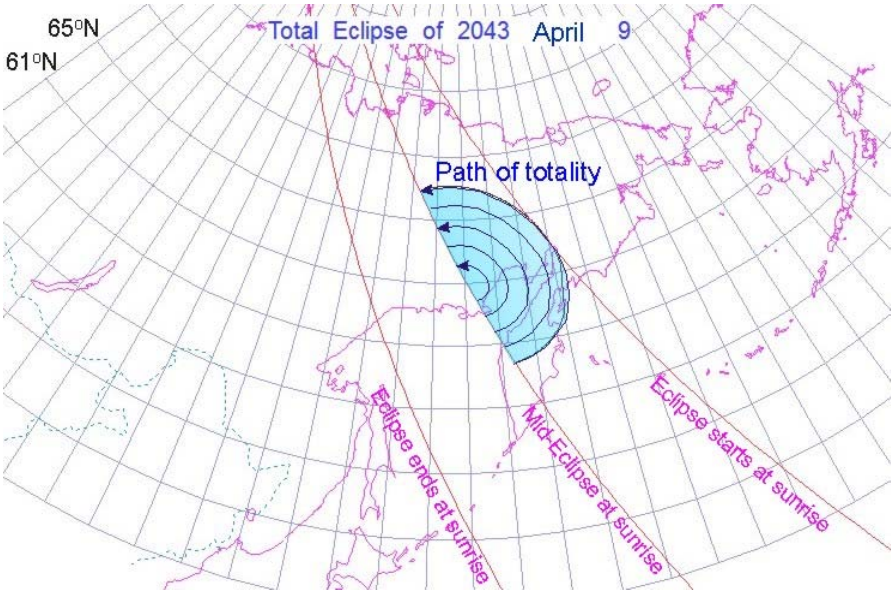




На этих же рисунках мы можем видеть, что вблизи летнего солнцестояния, если затмение наблюдается вблизи светлой полуночи в полярной области Земли на широтах более +66.6° (Северный полярный круг), тень может двигаться и с востока на запад. Соответственно, за Южным полярным кругом (широты от –66.6° до –90°) такая ситуация может случиться вблизи дня зимнего солнцестояния. Однако, широты в ±66.6° не будут предельными. Для нахождения граничной широты рассмотрим иной случай. Пусть затмение происходит вблизи весеннего равноденствия, а Луна располагается у восходящего узла своей орбиты. Предположим также, что лунная тень лишь слегка задела Землю с северной стороны. По рисунку мы можем определить, на какой широте произошло касание:

$$\varphi = 90° - \varepsilon - i = 61.4°.$$

Здесь ε – угол наклона экватора к эклиптике, *i* – наклон орбиты Луны к эклиптике. При затмении, близком к касательному, тень опишет на поверхности Земли дугу, по форме близкую к полукругу. В какой-то момент, ближе к окончанию затмения, она будет двигаться в западном направлении. Похожая ситуация сложится во время полного солнечного затмения 9 апреля 2043 года, которое будет наблюдаться на восходе Солнца на севере Камчатского полуострова. Область видимости полной фазы показана на рисунке. Такая же картина может наблюдаться в южном полушарии на широтах ниже –61.4° на заходе Солнца вблизи весеннего равноденствия или на его восходе вблизи осеннего равноденствия.



4. Система оценивания.

Этап 1 - 3 балла. Интервал широт, где тень может двигаться с запада на восток.
Оценивается 3 баллами только в случае правильного ответа (все широты). При указании половины интервала (от экватора до полюса) оценка составляет 1 балл, при указании интервала между полярными кругами - также 1 балл, в остальных случаях оценка за этап - 0 баллов. Формально говоря, участник олимпиады может не включать в ответ сами полюса, так как там понятия запада и востока не определены, это не влияет на оценку.

Этап 2 - 5 баллов. Интервал широт, где тень может двигаться с востока на запад.
При указании интервала широт от полярного круга до полюса (наиболее вероятная ошибка) оценка составляет 1 балл при указании одного полушария и 2 балла - при указании двух полушарий. При указании правильных границ оценка составляет 3 балла при указании одного полушария и 5 баллов - при указании двух полушарий. В последнем случае должно быть указано, при каких обстоятельствах может произойти такое затмение - вблизи равноденствий, тень Луны касается поверхности Земли. Оценка не меняется, если границы интервала изменены на 0.25° для учета видимых размеров Солнца.

Вероятная ошибка при правильном ответе: участник рассматривает случай, соответствующий солнцестояниям (верхние рисунки), но при этом указывает, что склонение Луны может достигать ε+i=28.6°, и поэтому минимальная широта по модулю равна 61.4°. Хотя данный ответ численно совпадает с правильным, но он получен из неверных соображений, так как при таких склонениях Луны затмения наступить не могут. Оценка за второй этап не превосходит 2 баллов (1 балла при указании одного полушария). Это правило действует, даже если участник олимпиады не указывает такое значение склонения Луны, но оно вытекает из его рассуждений, либо если правильный ответ дается без обоснований.

IX.5 КАРМАННЫЙ ПЛАНЕТАРИЙ

С.Г. Желтоухов

5. Условие. Один астроном решил сделать себе свой собственный планетарий, просверлив отверстия нужного размера в глобусе радиусом 20 см, в центр которого он установил точечный источник света. Оцените размер отверстия в глобусе, при котором размер проецируемой звезды перестанет сокращаться с уменьшением диаметра отверстия. Пусть такой диаметр соответствует самым слабым звездам, видимым невооруженным глазом. Считая, что относительная яркость звезд должна сохраняться, определите размер отверстия для самой яркой звезды ночного неба, Сириуса, имеющего звездную величину -1.5^m, и угловой размер его изображения. Звезды какой звездной величины сидящий рядом с планетарием астроном увидит, как точки?

5. Решение. Для начала рассчитаем угловой размер звезды для наблюдателя, расположенного в центре шара. Без учета дифракции света он будет равен отношению диаметра отверстия d к радиусу глобуса R:

$$\alpha = \frac{d}{R}.$$

Если бы распространение света всегда подчинялось правилам геометрической оптики, угловой размер сокращается вплоть до нуля при уменьшении отверстий. Будем называть эту величину «геометрическим» размером звезды.

На самом деле, дифракция света на краях апертуры вносит ограничение на минимальный угловой размер изображения:

$$\beta \approx \frac{\lambda}{d}.$$

Данное равенство имеет приближенный характер, так как пучок света, падающий на отверстие, не параллельный. По этим же причинам мы можем опустить коэффициент 1.22 в этой формуле. В итоге, дифракционный размер звезды увеличивается с диаметром отверстия.

Определим диаметр отверстия, при котором геометрический и дифракционный угловые размеры равны. В этом случае видимый размер звезды перестает уменьшаться, а напротив увеличивается с дальнейшим сужением отверстия:

$$\frac{d}{R} = \frac{\lambda}{d}.$$

Отсюда

$$d = \sqrt{\lambda R} \approx 0.3 \text{ мм}.$$

При вычислениях мы брали длину волны λ=550 нм, соответствующую максимуму чувствительности человеческого глаза. При таком радиусе отверстия оба фактора примерно одинаковы и накладываются друг на друга. Можно считать, что видимый размер изображения в этом случае будет примерно равен сумме геометрического и дифракционного:

$$\theta \approx \alpha + \beta = 2\frac{d}{R} = 2\frac{\lambda}{d} \approx 0.003 \text{ рад} = 10'.$$

Именно в таком конусе будет распределен свет от самого маленького отверстия, соответствующего звездам шестой звездной величины (самым слабым наблюдаемым невооруженным глазом звездам). Это существенно больше разрешения человеческого глаза, так что, к сожалению, такой самодельный планетарий вообще не сможет построить достаточно точечных звезд. Естественно, что более ярких звезд размеры будут еще больше.

Видимая суммарная яркость звезды определяется размером отверстия, дифракция на нее практически не влияет. Сириус ярче звезд шестой величины в $2.512^{6+1.5}$=1000 раз, и для такой звезды размер отверстия для него должен быть

$$d_S = d\sqrt{1000} \approx 10 \text{ мм.}$$

Это соответствует угловому размеру

$$\theta_S = \frac{d_S}{R} \approx 0.05 \text{ рад} = 3^\circ.$$

Здесь дифракция уже не играет никакой роли.

5. Система оценивания.

Этап 1 – 4 балла. Расчет оптимального диаметра отверстия.
Этап включает в себя определение «геометрического» размера (1 балл), определение «дифракционного» размера (1 балл, наличие коэффициента 1.22 не влияет на оценку), определение оптимального размера отверстия (2 балла). Неточности определения каждого из факторов, не превосходящие 2 раз, приводят к снятию соответствующего количества баллов. Если же один из факторов не учтен, то понятие минимального видимого диаметра теряет смысл. Вне зависимости от иных методов оценить его (расчеты яркости пятна с учетом мощности ламп и т.д.) этап полностью не засчитывается. Последующие этапы оцениваются в полной мере, если полученное значение видимого диаметра не отличается от правильного более, чем в 10 раз.

Этап 2 – 2 балла. Оценка возможности создания точечных изображений звезд.
Этап включает определение минимального углового размера изображения (1 балл). При этом коэффициент 2, приведенный в решении, не является обязательным – он может быть опущен или заменен коэффициентом 1.4, соответствующим наложению изображений по теореме Пифагора. Однако, если коэффициент не попадает в интервал от 1 до 2, оценка уменьшается на 1 балл. Второй балл выставляется в случае правильного вывода о невозможности точечных изображений. Если этот вывод сделан без корректного вычисления геометрического и дифракционного изображения, оценка за два первых этапа в сумме не превосходит 1 балл.

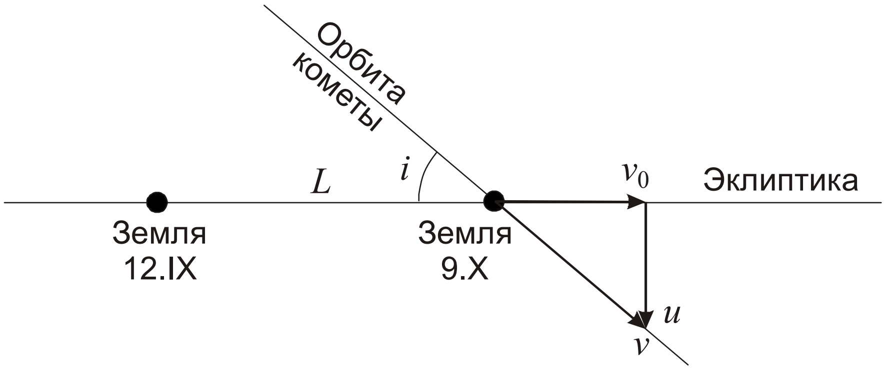
Этап 3 – 2 балла. Определение размера отверстия и углового размера изображения для Сириуса.
Ответ может быть в 1.4 или 2 раза меньше приведенного выше, если в такое же число раз меньшим оказывается угол θ при выполнении предыдущих этапов (см. выше), это не влияет на оценку. Однако, если на угловой размер изображения Сириуса влияет дифракция на крупном отверстии, то вне зависимости от ответа данный этап не засчитывается. Правильное численное определение обеих величин оценивается по 1 баллу.

IX.6 КОМЕТА СО СВИТОЙ

О.С. Угольников

6. Условие. 12 сентября 2018 года комета Джакобини-Циннера прошла на минимальном расстоянии от Земли в своем текущем обороте вокруг Солнца и одновременно оказалась в точке перигелия своей орбиты. После этого, 9 октября 2018 года, наступил острый максимум метеорного потока Дракониды, порожденного этой кометой. Считая, что радиант потока находится в северном полюсе эклиптики, а сам рой компактен, найдите минимальное расстояние кометы Джакобини-Циннера от Земли в 2018 году и наклонение ее орбиты к плоскости эклиптики. Эксцентриситет орбиты кометы равен 0.7, орбиту Земли считать круговой.

6. Решение. Изобразим орбиты кометы и Земли вблизи точки их пересечения в плоскости, перпендикулярной радиусу-вектору (направлению на Солнце). Мы считаем орбиты пересекающимися, так как по условию задачи наблюдался острый максимум метеорного потока, порожденного компактным роем частиц. Обозначим скорость кометы и метеорных частиц в точке встречи как v, скорость Земли как v_0. Их векторная разность – геоцентрическая скорость кометы u или, то же самое, скорость метеоров – перпендикулярна плоскости эклиптики, то есть лежит в плоскости рисунка. Следовательно, скорость v также расположена в этой плоскости.



Определим минимальное расстояние между Землей и кометой. Для этого перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с Землей. В ней комета движется со скоростью u перпендикулярно плоскости эклиптики (горизонтальной линии на рисунке), на которой находится Земля. Очевидно, максимальное сближение произойдет в тот момент, когда комета пересечет плоскость эклиптики. То есть, в момент времени t_0, 12 сентября 2018 года комета (если принять упрощения, сделанные в условии задачи) оказывается на минимальном расстоянии от Земли, причем в той же точке пространства, что где Земля окажется 9 октября (этот момент обозначим как t_1). Так как эти моменты разделяет меньше месяца, мы можем считать движение Земли равномерным. Отсюда получаем минимальное расстояние между Землей и кометой:

$$L = v_0\,(t - t_0) = 0.46 \text{ а.е.}$$

Теперь мы знаем, что точка пересечения орбит совпадает с точкой перигелия орбиты кометы, поэтому скорость кометы v в точке встречи есть перигелийная скорость кометы. Ее величина составляет

$$v = v_0\sqrt{1+e}.$$

Из прямоугольного треугольника, образованного векторами трех скоростей, определяем величину наклона орбиты кометы к плоскости эклиптики:

$$i = \arccos \frac{v_0}{v} = \arccos \sqrt{\frac{1}{1+e}} = 40^{\circ}.$$

Выходя за рамки решения данной задачи, отметим, что на самом деле радиант потока Драконид удален от полюса эклиптики более, чем на 10°. Если это учесть, то полученные характеристики орбиты кометы несколько изменятся: ее наклон орбиты составляет 32°, а минимальное расстояние от Земли в сентябре 2018 года было около 0.39 а.е.

6. Система оценивания.

Этап 1 – 4 балла. Определение минимального расстояния между Землей и кометой.
Решение может вестись в упрощенном виде, как описано выше. Участник может также не считать движение Земли прямолинейным, и вместо длины дуги определить длину хорды, что практически не скажется на ответе. При определении расстояния участники могут оставаться в гелиоцентрической системе отсчета, что несколько усложняет решение, но приводит к тому же результату. Требуемая точность ответа – 5% (полный балл), 10% (2 балла за этап). При больших ошибках (в частности, если они вызваны попыткой осуществить более сложное трехмерное решение и учитывать изменение скорости кометы со временем) этап не засчитывается.

Возможная ошибка участника: положение кометы 12 сентября не совпадает с точкой узла ее орбиты (к этому случаю не относится различие этих точек менее, чем на 0.02 а.е., вызванное попыткой учесть кривизну траекторий обоих тел). Данный ошибочный вывод может не быть сформулирован напрямую, но следовать из решений, что также попадает под эту категорию ошибок. В этом случае весь этап не засчитывается (0 баллов), вне зависимости от численного ответа. Второй этап при этом может быть засчитан (см. далее).

Этап 2 – 4 балла. Наклонение орбиты кометы.
Половина данных баллов (2) выставляется за правильное численное или формульное определение скорости кометы, другая половина – за определение угла наклона. При ошибочном выполнении одного из этих подэтапов второй может быть оценен полностью в случае верного выполнения (хотя при этом второй этап после ошибки на первом может дать неверный ответ).

В случае ошибки на первом этапе, связанной с различием точки перигелия кометы и точки ее пересечения с орбитой Земли (см. выше), второй этап, вообще говоря, требует обоснования равенства скорости кометы (и метеоров) при пересечении орбиты Земли и в перигелии. Если этот факт каким-либо образом обосновывается (комета вблизи перигелия), то второй этап в случае верного выполнения засчитывается полностью. Если скорости приравниваются без обоснований - оценка снижается на 1 балл (максимум 3 балла за этап).

Вероятная ошибка участника: наклон орбиты кометы равен 90° или каким-то образом определяется углом между экватором и эклиптикой (ответы 23.4°, 66.6° и т.д.). К этому же случаю относятся варианты, при которых ответ зависит от угла наклона экватора к эклиптике, то есть меняется, если придать этому углу иное значение. В этих случаях этап полностью не засчитывается (0 баллов).