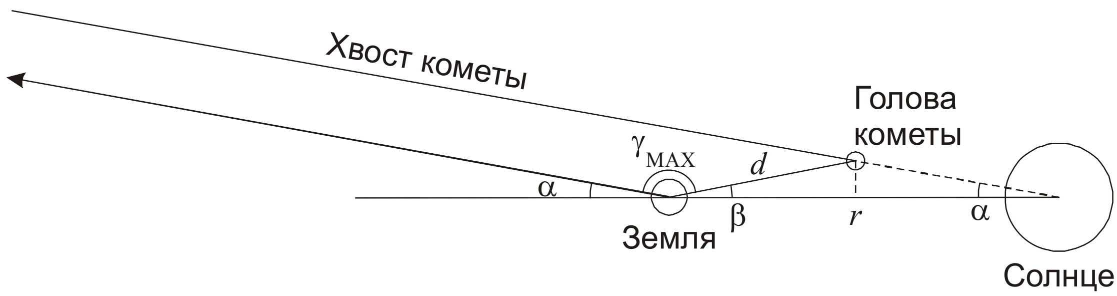
# 10.1. ВО ВСЕ НЕБО

**Условие.** В небе Земли появилась яркая комета с тонким прямым газовым хвостом длиной в 120°. Ее ядро располагалось на небе в 30° от Солнца. Определите максимальное возможное пространственное расстояние от Земли до ядра кометы. Орбиту Земли считать круговой, а хвост кометы – направленным в пространстве точно от Солнца.

**Решение.** Прямой газовый хвост кометы направлен на небе в сторону, противоположную Солнцу.




Пусть $\gamma$ – длина хвоста кометы в небе Земли, $\beta$ – угловое расстояние между ядром кометы и Солнцем. Обозначим гелиоцентрический угол между направлениями на Землю и комету как $\alpha$. Тогда, каким бы длинным не был хвост, на небе Земли он не может зайти дальше направления, показанного на рисунке стрелкой. Для его видимой длины в небе Земли справедливо неравенство:

$$\gamma \le \gamma_{MAX} = 180° - \alpha - \beta. \qquad (1)$$

Величины углов $\beta$ и $\gamma$ нам известны, они равны 30° и 120° соответственно. Отсюда мы имеем:

$$\alpha \le 180° - \gamma - \beta = 30°. \qquad (2)$$

Обозначим радиус земной орбиты как $r$. Из рисунка мы видим, что расстояние от Земли до ядра кометы $d$ при фиксированном угле $\beta$ будет тем большим, чем больше угол $\alpha$. Искомое максимальное расстояние будет достигнуто, когда угол a составит ровно 30°. Тогда из теоремы синусов в треугольнике "Земля-ядро кометы-Солнце" мы получаем выражение для расстояния до ядра кометы:

$$d \le r\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \le r\frac{1}{2\cos\beta} = 0.58\ а.е. \qquad (3)$$

Последнее неравенство получено с учетом того, что $\alpha \le \beta$. Его можно получить и напрямую, учитывая, что в случае максимального угла $\alpha$ треугольник "Земля-ядро кометы-Солнце" оказывается равнобедренным.

**Система оценивания**, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 6 баллов:</u> формирование условия на угол $\alpha$, который может быть определен как гелиоцентрический угол между направлением на Землю и комету, так и как геоцентрический угол между направлением на конец хвоста кометы и противосолнечную точку неба.

2 этап – 4 балла: определение максимального расстояния от Земли до ядра кометы. Этап может быть выполнен как решением равнобедренного треугольника, так и более общим решением теоремы синусов в общем виде для углов $\alpha$ (в Солнце) и $\alpha+\beta$ (в комете). Требуемая точность ответа – 0.02 а.е (ответ 0.6 а.е. может быть засчитан). При ошибках до 0.05 а.е. оценка снижается на 2 балла, при ошибках до 0.1 а.е. – на 3 балла.

Комментарий: два этапа в решении участника могут быть нераздельными, если он формулирует условие на расстояние $d$, минуя запись неравенства для угла $\alpha$ в явном виде. Такие решения оцениваются в полной мере.

# 10.2. ГЛАЗ ЗОМБИ

**Условие.** На Земле появился человек с исключительно острым зрением. Чтобы заметить звезду на небе, ему достаточно зафиксировать каждым глазом в среднем по одному фотону от звезды за такт фиксации изображения (0.04 секунды). Диаметр зрачка глаза при этом равен 8 мм, спектральные свойства зрения такие же, как у обычного человека. Какой будет проницающая способность зрения такого человека в звездных величинах? Условия для наблюдений идеальные, атмосферные эффекты не учитывать.

**Решение.** Пусть $\lambda$ – длина волны наилучшей видимости человеческого зрения, которую будем считать равной 5500 ангстрем. Энергия кванта с такой длиной волны есть

$$E = h\nu = hc/\lambda = 3.6\cdot 10^{-19} \text{ Дж.} \qquad (1)$$

Определим плотность потока энергии от звезды, при котором в зрачок заданного диаметра $d$ за заданное время $t$ будет попадать такая энергия:

$$J = \frac{4E}{\pi d^2 t} = \frac{4hc}{\pi d^2 \lambda t} = 1.8\cdot 10^{-13} \text{ Вт/м}^2. \qquad (2)$$

Нужно отметить, что эта величина характеризует не полное количество энергии, идущее от звезды, а только энергию в оптическом диапазоне спектра, других фотонов глаз не замечает. Поэтому при пересчете в звездные величины на основе сравнения с известным источником необходимо оперировать с плотностью потока энергии в видимом диапазоне. Для Солнца это величина $J_0$=600 Вт/м$^2$. Зная визуальную звездную величину Солнца $m_0$, находим проницающую способность "глаза Зомби":

$$m = m_0 - 2.5\lg(J / J_0) = 12. \qquad (3)$$

**Система оценивания**, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 3 балла:</u> определение энергии одного кванта в видимой области спектра. Этап может выполняться численно или включаться в аналитическом виде в последующие формулы. Участник олимпиады может взять несколько иное значение длины волны, засчитывается любое значение от 3500 до 7000 А, что дает эффект не более $0.5^m$ в итоговом ответе без влияния на оценку. При появлении лишних численных коэффициентов ($2\pi$, $1/2\pi$ и т.д.) и при арифметической ошибке в 2 раза и более оценка снижается на 1 балл, при ошибке в 4 раза и более оценка уменьшается на 2 балла без влияния на последующие этапы.

<u>2 этап – 3 балла:</u> определение плотности потока энергии от предельно заметной звезды. При ошибке в формуле (в частности, если диаметр зрачка путается с его радиусом) оценка уменьшается на 2 балла без влияния на последующие этапы. Аналогично предыдущему этапу, при арифметической ошибке в 2 раза и более оценка снижается на 1 балл, при ошибке на порядок и более оценка уменьшается на 2 балла без влияния на последующие этапы.

<u>3 этап – 4 балла:</u> определение предельной звездной величины. Требуемая точность – $1^m$ без учета ошибок на предыдущих этапах. Если в качестве источника сравнения берется Солнце с болометрической величиной плотности потока энергии – это увеличивает проницающую способность примерно на $1^m$ (до $13^m$ при верных расчетах), это считается физической ошибкой, оценка уменьшается на 2 балла.

# 10.3. МАГЕЛЛАНОВ МОНСТР

**Условие.** Звезда R136a1 в рассеянном звездном скоплении R136 в Большом Магеллановом облаке является самой массивной из известных в настоящее время звезд, ее масса оценивается в 315 масс Солнца. Абсолютная болометрическая звездная величина этой звезды равна $-12.62^m$. Звезда является источником сильнейшего звездного ветра с темпом в $5.1\cdot10^{-5}$ масс Солнца в год. Как и во сколько раз эта звезда быстрее теряет водород – в виде звездного ветра или в термоядерных реакциях синтеза гелия, которые являются основным источником излучаемой энергии? Считать, что химический состав звезды и ее ветра аналогичен солнечному, ядро гелия-4 на 0.7% легче четырех протонов.

**Решение.** Сравнивая абсолютные болометрические звездные величины R136a1 и Солнца, мы находим величину светимости R136a1:

$$L = L_0 \cdot 10^{-0.4(m-m_0)} = 8.6\cdot10^6 \cdot L_0 = 3.3\cdot10^{33}\text{ Вт.} \qquad (1)$$

Здесь $L_0$ – светимость Солнца, $m$ и $m_0$ – абсолютные звездные величины R136a1 и Солнца. Такое энерговыделение обеспечивается потерей массы в единицу времени $L/c^2$. Учитывая, что в ходе синтеза гелия теряется часть массы водорода $\eta$=0.007, определим, сколько водорода должна сжигать за секунду звезда, чтобы обеспечить такое энерговыделение:

$$\dot{M}_T = \frac{L}{\eta c^2} = 5.2\cdot10^{18}\text{ кг/с.} \qquad (2)$$

Учитывая, что масса Солнца составляет $2.0\cdot10^{30}$ кг, а в годе около $3.16\cdot10^7$ секунд, мы получаем, что потеря водорода в термоядерных реакциях в недрах R136a1 составляет $8.2\cdot10^{-5}$ масс Солнца в год.

По условию задачи, химический состав звездного ветра R136a1 мы считаем солнечным, то есть содержащим около 70% водорода. Тогда потеря водорода в звездном ветре есть $3.6\cdot10^{-5}$ масс Солнца в год. В итоге мы получаем, что два механизма потери водорода звездой имеют сравнимый порядок величины, преобладает потеря в термоядерных реакциях. Отношение темпа процессов есть

$$\frac{\dot{M}_T}{\dot{M}_W} \approx 2.3. \qquad (3)$$

Это отношение отражается тем фактом, что к концу термоядерного горения водорода, который наступит у R136a1 в течение всего лишь двух миллионов лет, эта звезда потеряет чуть больше трети своей массы.

**Система оценивания**, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

Этап 1 – 3 балла: определение светимости звезды R136a1, исходя из ее абсолютной звездной величины. Этап может быть выполнен численно или аналитически. Так как в условии задана абсолютная болометрическая величина звезды, а в справочных данных – абсолютная болометрическая величина Солнца, то при использовании Солнца как объекта сравнения этап выполняется прямым использованием формулы Погсона без привлечения каких-либо численных коэффициентов, несмотря на очевидную разность эффективных температур звезд.

Требуемая точность вычислений – 10%, так как звездные величины известны достаточно хорошо. Если этап выполняется численно, то при арифметических ошибках до 20% оценка уменьшается на 1 балл, до 30% - на 2 балла, при больших арифметических или физических ошибках этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере.

Этап 2 – 4 балла: определение темпа потери водорода в звезде R136a1 за счет термоядерных реакций. Величина может выражаться в кг/с, массах Солнца в год, а также быть записана в аналитическом виде для численной подстановки на заключительном этапе решения. При численном решении требование по точности – 10% без учета ошибок на предыдущем этапе, при ошибках до 20% оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка участника: опускание фактора $\eta$ в формуле (2), что увеличивает темп сгорания водорода в 150 раз. Это считается грубой физической ошибкой, весь этап не засчитывается, последующие, при условии правильного выполнения, оцениваются в полной мере.

Этап 3 – 2 балла: определение темпа потери водорода в звезде R136a1 за счет звездного ветра. Величина может вычисляться в массах Солнца в год (и тогда этап сводится к одной элементарной операции), кг/с, а также быть записана в аналитическом виде для численной подстановки на заключительном этапе решения. При численном решении и переводе в другие единицы требование по точности – 15% без учета ошибок на предыдущем этапе, при ошибках до 30% оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка участника: опускание фактора 0.7, связанного с долей водорода в звездном ветре, и переоценка потерь водорода примерно на 40%. В этом случае оценка уменьшается на 2 балла без влияния на последующие этапы. Несколько отличная величина вклада водорода (от 0.6 до 0.8), соответствующая указанной выше допустимой погрешности, не является основанием для изменения оценки.

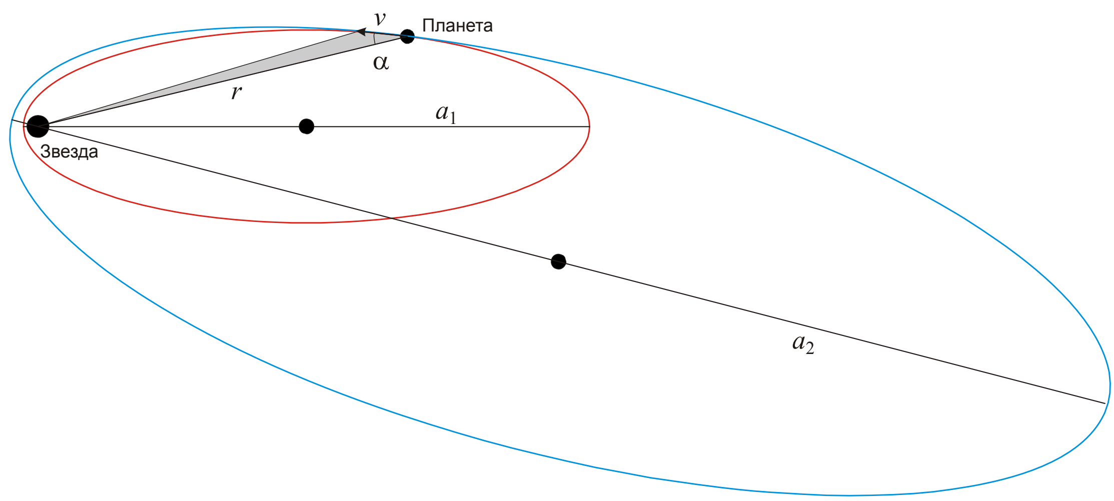
Этап 4 – 1 балл: формулировка окончательного ответа. Ввиду близости величины обоих факторов само указание, какой из них больше, на оценку не влияет, оценка определяется только количественным соотношением. В случае численного выполнения предыдущих этапов последний этап сводится к вычислению отношения уже найденных численных величин, и должен производиться с точностью не хуже 10% (без учета сделанных ранее ошибок), в противном случае он не засчитывается.

В случае аналитического выполнения предыдущих этапов последний этап заключается к записи итоговой формулы и подстановки в нее всех численных данных. В случае неточного ответа оценка изменяется в зависимости от того, где была допущена ошибка. Если она связана с выполнением предыдущих этапов (неточные формулы), снижается оценка за соответствующие этапы согласно написанному выше. При ошибке в финальном численном расчете предыдущие этапы оцениваются полностью, последний не засчитывается при погрешности более 10%.

# 10.4. ЭПОХА МЕНЯЕТСЯ, ПЛАНЕТА ОСТАЕТСЯ

**Условие.** Планета обращается по эллиптической орбите с большой полуосью $a_1$ и эксцентриситетом $e$ вокруг звезды – красного гиганта. В один момент звезда быстро сбрасывает оболочку, уносящую ровно половину массы гиганта. Тем не менее, эксцентриситет орбиты планеты остался без изменений. Считая процесс сброса оболочки и ее ухода из системы мгновенным, определите расстояние от планеты до звезды $r$ в этот момент и новую большую полуось орбиты $a_2$. Обе величины выразить как функции эксцентриситета $e$. При каких эксцентриситетах орбиты такое вообще возможно? Взаимодействие оболочки с планетой с момента сброса не учитывать, планета несравнимо меньше звезды по массе.

**Решение.** Хорошо известно, что при мгновенной потере половины массы центральным телом его спутник с круговой орбиты перейдет на параболическую и покинет систему, связанную с центральным телом. Однако, если орбита эллиптическая, а спутник в этот момент находится на расстоянии больше среднего, то он останется в системе. В задаче необходимо рассмотреть условие, при котором эксцентриситеты старой и новой орбит одинаковы и равны $e$.




Сброс оболочки звезды произошел, когда планета располагалась на расстоянии $r$ от нее. Момент импульса единицы массы планеты (или удвоенная площадь заштрихованного треугольника, который описывает радиус-вектор планеты за единичное время) есть

$$L = v \cdot r \cdot \sin\alpha, \qquad (1)$$

где $\alpha$ – угол между радиус-вектором и скоростью планеты. В соответствии со II законом Кеплера (или с законом сохранения момента импульса) эта величина не меняется в ходе движения планеты. Мы можем определить ее для перицентра, когда значения скорости и радиуса нам известны, а угол между их векторами прямой:

$$L = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \cdot a \cdot (1-e) = \sqrt{GMa \cdot (1-e^2)}. \qquad (2)$$

Опуская размерный множитель $GM$, мы получаем квадратный корень из площади эллипса. В момент сброса оболочки характеристики движения планеты ($v$, $r$, $\sin\alpha$) и величина $L$ не изменяется. Если по условию задачи не меняется и эксцентриситет – это означает, что произведение $Ma$ тоже постоянно. Коль скоро масса звезды уменьшилась вдвое ($M_2=M_1/2$), мы получаем

$$a_2 = 2a_1. \tag{3}$$

Большая полуось орбиты планеты должна удвоиться. Теперь, из закона сохранения энергии мы можем получить известную формулу для скорости движения планеты на расстоянии $r$:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{4}$$

Коль скоро $M_2=M_1/2$, мы имеем:

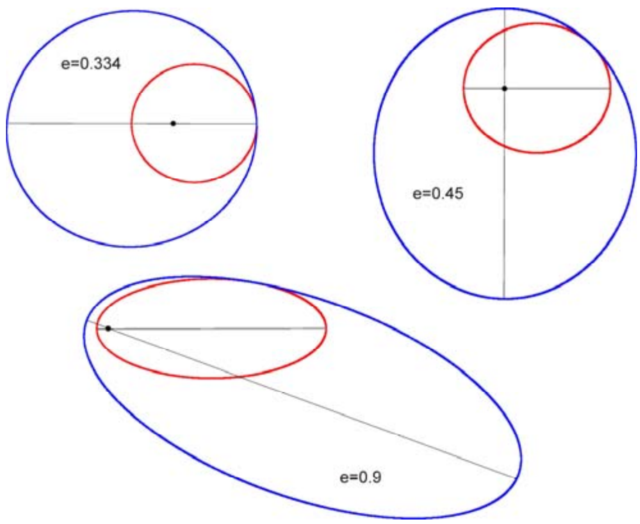
$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_2}\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{2a_2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{4a_1}. \tag{5}$$

В итоге получаем:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{4a_1}; \quad r = \frac{4a_1}{3} = \frac{2a_2}{3}. \tag{6}$$

Интересно, что итоговые соотношения (3) и (6) вообще не зависят от эксцентриситета $e$, предполагая только его постоянство в момент сброса оболочки. Тем не менее, описанная картина может иметь место не при любых эксцентриситетах. Для того, чтобы планета достигла расстояния $4a_1/3$ на своей первоначальной орбите, должно выполняться условие:

$$1/3 \le e < 1. \tag{7}$$




Естественно, эксцентриситет меньше единицы, так как по условию орбита эллиптическая. В граничном случае ($e$=1/3) сброс оболочки должен застать планету в апоцентре, который далее станет перицентром новой орбиты. При больших эксцентриситетах большая ось новой орбиты повернется по отношению к большой оси старой орбиты, причем при эксцентриситете около 0.45 угол поворота составит 90° (см. модельные рисунки).

**Система оценивания**, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

1 этап – 3 балла: вывод о соотношении новой и старой большой полуоси. Оптимальный, но не единственный способ – прямой анализ закона сохранения момента импульса или второй закон Кеплера. Этап оценивается полностью, если используемая методика универсальна и не зависит от эксцентриситета. Если участник ограничивается случаем апоцентра первоначальной орбиты ($e$=1/3) без корректного распространения на другие случаи, этап в случае правильного ответа оценивается в 1 балл. В случае неверного соотношения, не эквивалентного $a_2=2a_1$, этап не засчитывается. Если соотношение записано как функция эксцентриситета $e$ и соответствует правильному только при некоторых фиксированных значениях $e$ между 1/3 и 1 (например, при том же $e$=1/3), за этап выставляется 1 балл.

2 этап – 4 балла: вывод о расстоянии планеты от звезды $r$ в момент изменения ее массы. При этом используются законы сохранения импульса и энергии, соответствующие формулы (2) и (4) могут выводиться, а могут браться как известные. Аналогично предыдущему этапу, полная оценка ставится только в случае правильного вывода $r=4a_1/3$ вне зависимости от эксцентриситета, что должно быть четко показано. Если участник ограничивается случаем апоцентра первоначальной орбиты ($e$=1/3) без корректного распространения на другие случаи, этап в случае правильного ответа оценивается в 1 балл. В случае неверного соотношения, не эквивалентного $r=4a_1/3$ или $r=2a_2/3$, этап не засчитывается. Если соотношение записано как функция эксцентриситета $e$ и соответствует правильному только при некоторых фиксированных значениях $e$ между 1/3 и 1 (например, при том же $e$=1/3), за этап выставляется 1 балл.

3 этап – 3 балла: указание возможных значений эксцентриситета. Указание верхней границы ($e$<1) не является обязательным, так как оно фактически записано в условии. Появление меньшей верхней границы, вне зависимости от причин, автоматически уменьшают оценку на 1 балл. Ошибки, сделанные на предыдущих этапах, приводящие к неверному минимальному значению эксцентриситета, уменьшают оценку за этот этап еще на 1 балл, если только ответ не получается заведомо абсурдным (невозможность ситуации или, наоборот, ее возможность для любых эксцентриситетах, тогда этап не засчитывается). Если значение эксцентриситета 1/3 указывается как единственное, оценка за этап составляет 1 балл.

Возможное неполное решение участника: зная только формулы для скорости тела в перицентре и апоцентре, участник может решить задачу для частного случая апоцентра изначальной орбиты, получив значение $e$=1/3 и верные ответы для $a_2$ и $r$ только для этого случая. Сам по себе этот вывод дает только по 1 баллу за каждый из этапов решения (сумма – 3 балла).

Далее участник может представлять, что описанный им случай является пограничным, картина заведомо не выполняется для меньших эксцентриситетов (круговые орбиты становятся параболическими, слабо вытянутые – сильно вытянутыми), но выполняются для больших эксцентриситетов. Это можно объяснить логически – представить планету на вытянутой орбите. Тогда сброс оболочки вблизи перицентра сделает орбиту гиперболической, то есть увеличит эксцентриситет, а вблизи апоцентра – наоборот, уменьшит эксцентриситет. Поэтому на орбите обязательно должна быть точка, в которой эксцентриситет останется прежним. Эти рассуждения при наличии правильного вывода $e$≥1/3 могут быть основанием для полной оценки в 3 балла за третий этап с суммой 1+1+3=5 баллов. Если же эксцентриситет 1/3 указывается как единственно возможный, за 3 этап выставляется 1 балл, сумма за все решение не превышает 1+1+1=3 баллов.

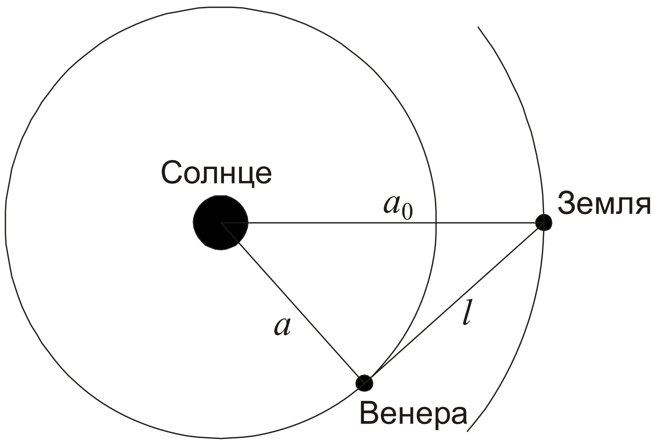
Дальнейшее увеличение оценки возможно только при указании, что значения $r$ и $a_2$ не изменятся для других значений эксцентриситета $e$>1/3 и зависят от степени обоснованности этих выводов.

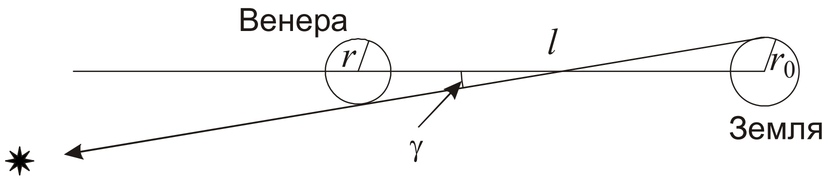
# 10.5. ПЛАНЕТА ПЕРЕД СКОПЛЕНИЕМ

**Условие.** В первые дни апреля 2020 года планета Венера прошла по звездному скоплению Плеяды. Оцените звездную величину самых ярких звезд скопления, покрытия которых Венерой произошли на Земле. Считать орбиты Венеры и Земли круговыми, и что в это время Венера находилась в наибольшей восточной элонгации, проходя на небе через центр скопления. Считать Плеяды в небе Земли кругом с угловым диаметром 1.5°, принять, что его звезды распределены на небе внутри этого круга однородно. Считать также, что количество звезд скопления, имеющих светимость более $J$, пропорционально $J^{-1/2}$.

**Решение.** Определим вначале расстояние между Венерой и Землей. Это несложно сделать, приняв, что Венера находится в наибольшей восточной элонгации при круговых орбитах:

$$l = \sqrt{a_0^2 - a^2} = 0.69 \textit{ а.е.} \approx 105 \textit{ млн км}. \qquad (1)$$

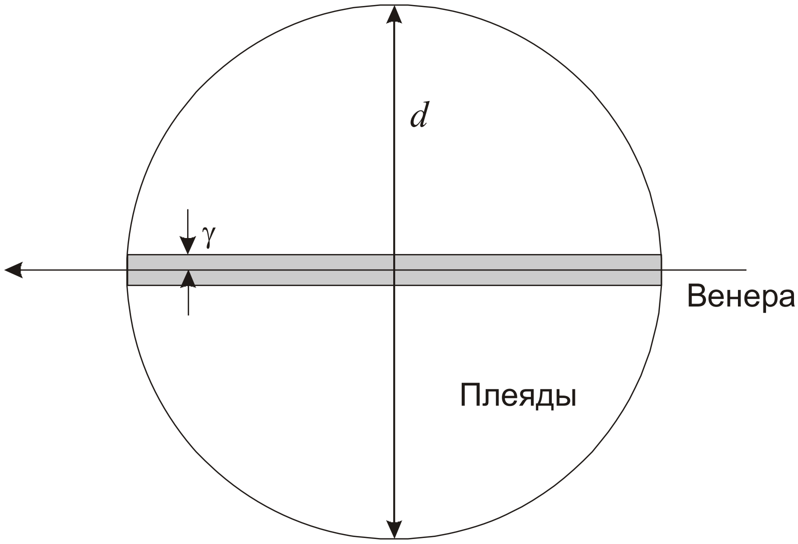



Здесь $a$ и $a_0$ – радиусы орбит Венеры и Земли. Определим теперь максимальный угол между направлением на звезду и линией, соединяющий центры Земли и Венеры, при котором возможно наступление покрытия хотя бы где-нибудь на Земле:

$$\gamma = \frac{r + r_0}{l} = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 24.8''. \qquad (2)$$

Обратим внимание, что этот угол примерно вдвое больше видимого радиуса Венеры. В итоге, область Плеяд, в которой звезды могут быть покрыты Венерой, образуют прямоугольник со сторонами $d$ (угловой диаметр скопления) и 2γ.




Определим, какую часть видимой площади Плеяд занимает этот прямоугольник:

$$k = \frac{2d\gamma}{\pi d^2/4} = \frac{8\gamma}{\pi d} \approx 0.012 \approx \frac{1}{85}. \qquad (3)$$

Таким образом, если в Плеядах есть $N$=85 звезд ярче звездной величины $m$, то можно ожидать, что какая-то из них будет покрыта Венерой. Нам нужно определить эту самую величину $m$. Учтем, что в Плеядах есть $N_0 \approx 10$ звезд, видимых невооруженным глазом, то есть звезд ярче звездной величины $m_0$=6. Тогда количество звезд ярче величины $m$ будет равно

$$N = N_0 \left( \frac{J(m)}{J(m_0)} \right)^{-1/2} = N_0 (10^{-0.4(m-m_0)})^{-1/2} = N_0 \cdot 10^{0.2(m-m_0)}. \qquad (4)$$

Отсюда мы оцениваем звездную величину самой яркой покрываемой Венерой звезды:

$$m = m_0 + 5\lg(N/N_0) \approx 10.5. \qquad (5)$$

Наша приближенная оценка оказывается близка к действительности. Вечером 3 апреля 2020 года, около 20 часов по московскому времени Венера покрыла звезду GSC 1800:1620 с блеском $9.7^m$. Произошло также несколько покрытий звезд с блеском чуть слабее $10^m$.

**Система оценивания**, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

1 этап – 1 балл: определение расстояния между Землей и Венерой в восточной элонгации. Выставляется только при правильном методе (формуле) и точности не хуже 0.02 а.е.

2 этап – 4 балла: вычисление ширины полосы на небе, в которую должны попасть звезды скопления Плеяды, чтобы произошло покрытие. Требуемая точность – 5%, при арифметической ошибке до 10% оценка уменьшается на 1 балл, при ошибке до 20% оценка уменьшается на 2 балла.

Вероятная ошибка при решении: размер полосы считается равным видимому диаметру Венеры, что уменьшает ее примерно в 2 раза. В случае этой физической ошибки оценка за второй этап составляет 1 балл только в случае отсутствия иных ошибок, иначе этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере.

Вероятная ошибка при решении: опускание фактора 2 при расчете ширины полосы (угловой диаметр Венеры путается с радиусом). Аналогично, оценка за второй этап составляет 1 балл только в случае отсутствия иных ошибок, иначе этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере. Если обе указанные ошибки накладываются друг на друга (эффект порядка 4 раз) – этап не засчитывается.

3 этап – 3 балла: вычисление доли площади Плеяд на небе, которая может быть покрыта Венерой. Требуемая точность (без учета ошибок на предыдущих этапах) – 10%. При ошибках до 20% оценка уменьшается на 1 балл, далее – на 2 балла.

Вероятная ошибка при решении участника: путаница радиуса и диаметра скопления с итоговой ошибкой в 2 или 4 раза. Максимальная оценка за этап составляет 1 балл.

4 этап – 2 балла: вычисление звездной величины покрываемой звезды. Требуемая точность – $1.5^m$, при округлении до целых ответы $10^m$ и $11^m$ засчитываются как правильные, если не сделано ошибок на предыдущих этапах. Участник может указать, что из $N$ звезд ярче найденной величины $m$ некоторые могут оказаться ярче, а половина из них – в 4 раза или на $1.5^m$ более яркими, чем найденная граница. Хотя данные рассуждения не являются абсолютно корректными с точки зрения теории вероятности, они оцениваются полностью, и ответы $9$-$10^m$, полученные таким образом, засчитываются.

Вероятный ход решения: участник может по-другому "калибровать" количество известных ему ярких звезд в Плеядах: например, считать, что там 6 звезд ярче $6^m$ (с итоговым ответом при правильных вычислениях $11.7^m$, оценивается полностью) или что там 1 звезда ярче $3^m$ (с итоговым ответом $12.6^m$, снижение на 1 балл, так как статистические оценки нельзя делать на базе одной звезды).

# 9/10.6. МАРАФОН МЕССЬЕ

**Условие.** «Марафоном Мессье» называется визуальное наблюдение в телескоп всех объектов каталога Мессье из одной точки Земли в течение одной ночи. Определите, на какой самой северной широте Земли можно провести этот марафон в ночь весеннего равноденствия. Считать, что любой объект каталога Мессье можно увидеть, если Солнце опустилось под горизонт хотя бы на 12 градусов, вне зависимости от характеристик объекта, если только он находится над горизонтом. Поглощение света и атмосферную рефракцию не учитывать.

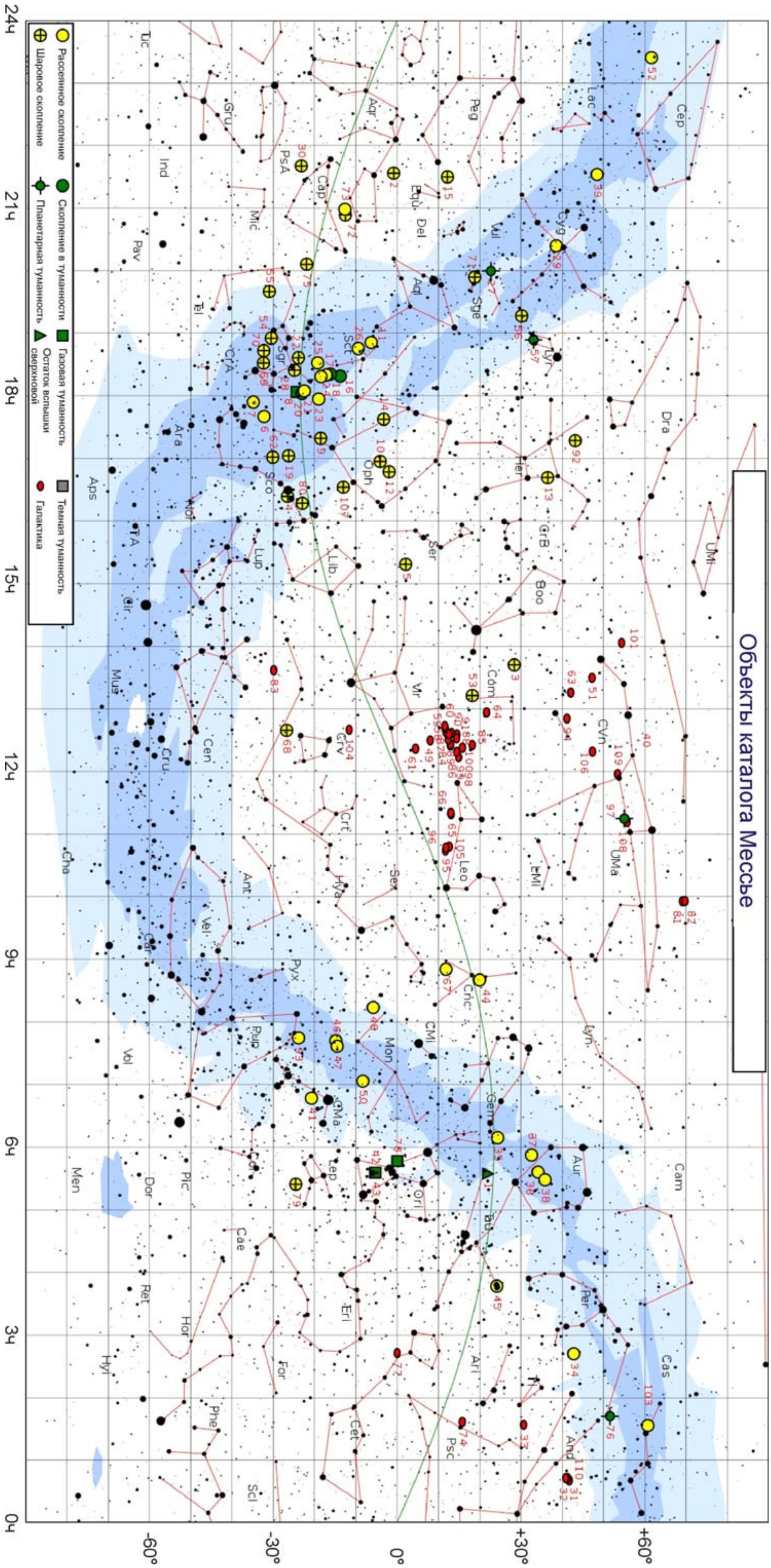
Вам выдана звездная карта с объектами каталога Мессье, указанными символами, описанными в левом нижнем углу рисунка. Около объектов указаны их номера по каталогу Мессье. Приведена также координатная сетка на эпоху 2000 года. Считайте, что наблюдения проводятся в ту же эпоху.

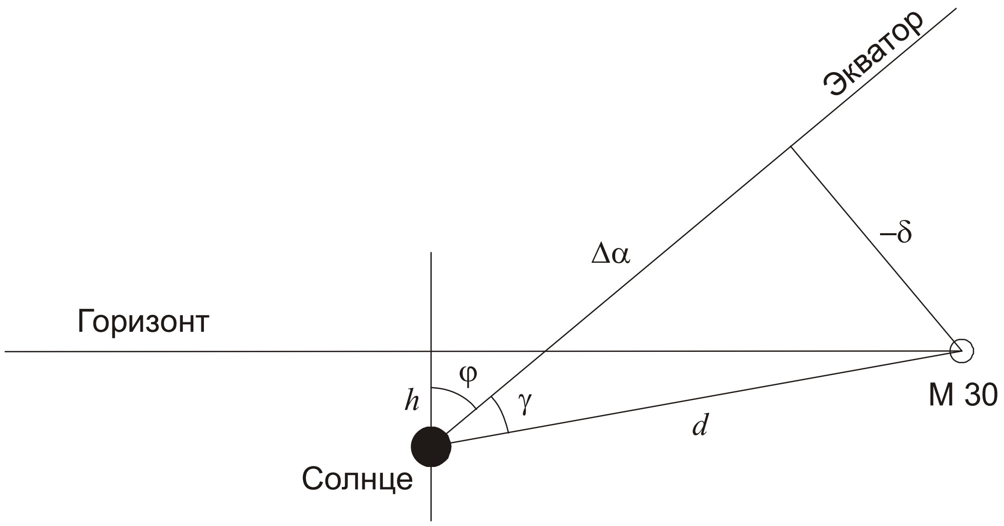
**Решение.** Первое ограничение на широту наблюдения всех объектов каталога Мессье, о котором можно подумать, связано с появлением над горизонтом южных объектов этого каталога. Самый южный объект – рассеянное скопление M7 – имеет склонение около $-35°$ и восходит на широтах до $+55°$. Однако есть и другие, более сильные ограничения на широту места, связанные с расположением объектов на небе относительно Солнца.

Наблюдения происходят вблизи весеннего равноденствия, когда координаты Солнца составляют (0ч, 0°). Вечером, следом за Солнцем, заходят области неба с большим прямым восхождением, причем в северном полушарии объекты южного небесного полушария делают это раньше, а объекты северного небесного полушария – позже. В правой части карты мы видим, что объектов каталога Мессье южнее экватора там нет, галактика M77 находится на экваторе почти на 3ч восточнее Солнца, она будет достаточно хорошо видна вечером в северных умеренных широтах. Ближе всего к Солнцу располагается галактика M74, но и ее элонгация существенно больше 12°, а северное склонение дает возможность наблюдаться в северных широтах.

Иная ситуация складывается на предрассветном небе. В каталоге Мессье есть объекты с прямым восхождением 21-22ч и южным склонением. В северном полушарии Земли они могут восходить в утренние сумерки и уже не быть видимыми. Сложнее всего на рассвете наблюдать шаровое скопление M30 в созвездии Козерога, именно им и определяется возможность совершить полный "марафон Мессье" в северных широтах. Нам нужно определить широту $\varphi$, на которой в момент восхода скопления Солнце окажется на глубине $h$=12° под горизонтом.

Можно решить задачу аналитическим способом. По карте определяем координаты скопления M30: $\alpha$=21ч40м, $\delta$=$-23°$. Разница прямых восхождений Солнца и скопления есть 2ч20м или 35°. Скопление находится не очень далеко от Солнца, и можно рассматривать часть небесной сферы как плоскость.


Объекты каталога Мессье
Рассеянное скопление
Шаровое скопление
Скопление в туманности
Планетарная туманность
Газовая туманность
Остаток вспышки сверхновой
Темная туманность
Галактика




Угол между небесным экватором и направлением от Солнца к скоплению равен

$$\gamma = \arctan\frac{|\delta|}{\Delta\alpha} = 33^\circ. \tag{1}$$

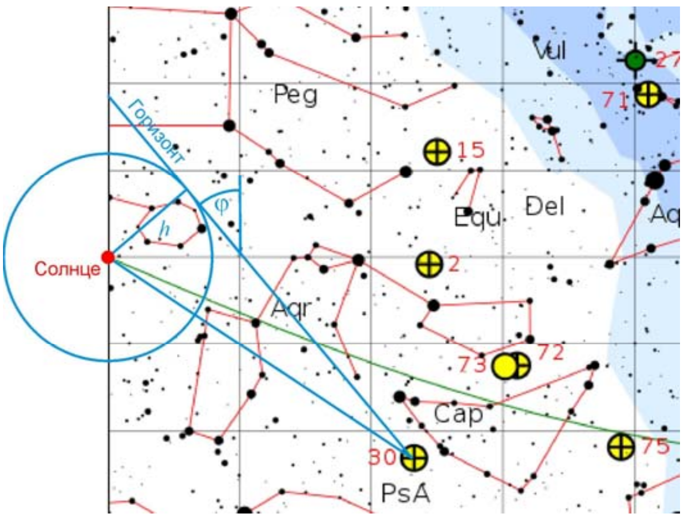
Угловое расстояние между скоплением и Солнцем есть

$$d = \sqrt{\Delta\alpha^2 + \delta^2} = 42^\circ. \tag{2}$$

Отсюда мы получаем широту места как угол между экватором и направлением на зенит:

$$\varphi = \arccos\frac{h}{d} - \gamma = 40^\circ. \tag{3}$$

Учитывая практический характер задачи и неточность определения координат скопления по карте, задачу можно решить и графически. Для этого пометим на карте положение Солнца, нарисуем окружность радиусом $h$ и центром в Солнце. Это несложно сделать, так как на карте проведены координатные линии:




Горизонт в этом случае есть линия, касающаяся этой окружности. Нас интересует случай, когда горизонт проходит через скопление M30. Построив данную линию, мы можем найти широту как угол между ней и вертикальной линией карты (направлением на полюс). При аккуратных построениях мы получаем то же значение широты $\varphi = +40°$.

В действительности, наблюдать шаровое скопление у горизонта во время навигационных сумерек весьма затруднительно, поэтому считается, что полный "марафон Мессье" можно совершить южнее широты +35°.

**Система оценивания**, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 4 балла:</u> формулировка предельного условия для широты, при котором "марафон Мессье" может быть совершен полностью. Правильный ответ может быть связан только с шаровым скоплением M30.

Возможная ошибка участника: поиск предельной широты, исходя из координат самого южного объекта каталога Мессье, и запись ответа $\varphi$=+55° с возможной погрешностью в несколько градусов. Если этот вывод формулируется как частное условие с дальнейшим продолжением решения, то оценка определяется правильностью этого решения. Если же данный ответ считается окончательным, оценка за всю задачу не превосходит 2 баллов и снижается в случае ошибок в поиске южного объекта и вычислении широты.

Возможная ошибка участника: указание иного объекта, определяющего верхнюю границу широтного интервала. В этом случае этап оценивается в 2 балла, последующие оцениваются в том случае, если методика оценки широты соответствует описанным выше, но для иного объекта.

<u>2 этап – 6 баллов:</u> определение широты. Численный и графический способ являются одинаково верными и оцениваются полностью. При условии правильного метода требуемая точность определения широты – 4°, далее оценка снижается на 1 балл за каждые 2° дополнительной погрешности (при этом, очевидно, оценка за этап не может быть меньше 0 баллов). Участники могут не пользоваться плоским приближением и идти методом сферической тригонометрии, что значительно усложняет выкладки. Данный способ засчитывается, если произведен правильно и дает правильный ответ (38°) с требуемой точностью.

При использовании качественно неверной методики определения широты или неверного задания условия для ее поиска, вне зависимости от ответа, этап не засчитывается.