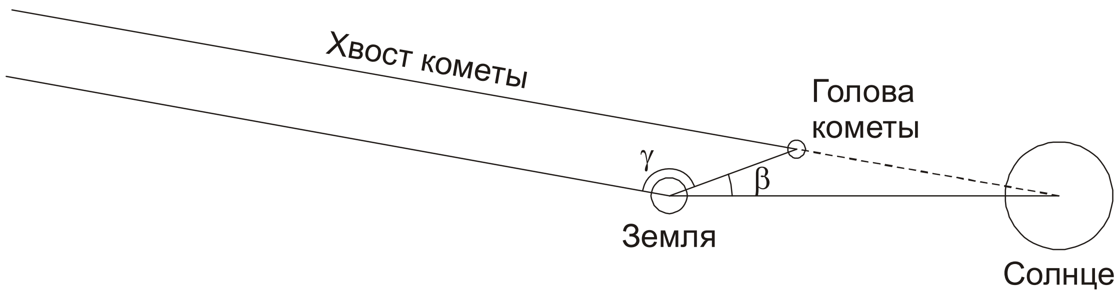
11.1. ВИФЛЕЕМСКАЯ КОМЕТА

Условие. Перед Новым годом (по григорианскому календарю) на небе появилась яркая комета с тонким прямым газовым хвостом длиной в 120°. В некотором пункте Земли комета (голова и хвост) хорошо видна целиком, причем в течение всей ночи (при погружении Солнца под горизонт более 12°). Определите возможные значения широты этого пункта. Рефракцией и поглощением света в атмосфере пренебречь. Считать, что газовый хвост кометы направлен в пространстве точно от Солнца, а угловые размеры головы кометы малы.

Решение. Прямой газовый хвост кометы направлен на небе в сторону, противоположную Солнцу. Можно также сказать, что на небе хвост направлен в сторону противосолнечной точки. Но, как бы не были расположены друг относительно друга Солнце, Земля и комета, прямой тонкий хвост не может пройти за противосолнечную точку (мы не рассматриваем экзотический случай Земли внутри хвоста кометы, так как голова кометы не была бы видна в этом случае ночью).



Из рисунка мы видим, что каким длинным не был бы хвост, его угловой размер в небе земли γ не может быть больше $180°-\beta$, где β – угловое расстояние ядра кометы от Солнца. Угловая длина хвоста приближается к этому максимуму, если комета располагается рядом с Землей. Коль скоро длина хвоста достигла 120°, можно сделать вывод, что голова кометы располагалась на небе не далее 60° от Солнца.

Тонкий газовый хвост будет виден в небе как дуга большого круга небесной сферы, содержащая голову кометы и противосолнечную точку (а значит, и само Солнце). Очевидно, что в течение всей ночи, когда Солнце располагается под горизонтом, противосолнечная точка находится выше горизонта. Поэтому для того, чтобы вся комета была видна, нам достаточно потребовать, чтобы над горизонтом находилось ее ядро, так как дуга большого круга длиной менее 180° будет целиком над горизонтом, если выше горизонта располагаются оба ее конца.

Коль скоро комета наблюдалась в течение всей ночи, вне навигационных сумерек, можно сделать два вывода: во-первых, сама ночь наступила, то есть Солнце опустилось под горизонт хотя бы на 12°, а во-вторых, Солнце в течение ночи не опустилось глубже 60° под горизонт, иначе голова кометы тоже обязательно бы зашла за горизонт. Итак, нижняя кульминация Солнца наступила на высоте h, лежащей в интервале от $-60°$ до $-12°$.

В условии сказано, что комета наблюдалась перед Новым годом, то есть вскоре после зимнего солнцестояния. Будем считать, что склонение Солнца δ было равно $-23°$. Высота светила в нижней кульминации составляет

$$h = -90° + |\,\varphi + \delta\,|, \qquad (1)$$

из чего следует

$$30° < | \varphi + \delta | < 78°. \qquad (2)$$

Нам необходимо рассмотреть два случая. В первом ("южном") случае мы получаем неравенство

$$-78° < \varphi + \delta < -30°, \qquad (3)$$

из которого вытекает, что широта φ может принимать значения от $-78°-\delta=-55°$ до $-30°-\delta=-7°$. Во втором ("северном") случае мы имеем

$$30° < \varphi + \delta < 78°, \qquad (4)$$

из чего получаем, что широта попадает в интервал от $30°-\delta=+53°$ до $78°-\delta=+101°$. Значение широты ограничено величинами $\pm90°$, поэтому северный интервал, где выполняется условие задачи, соответствует широтам от $+53°$ до $+90°$.

Смысл полученных значений понятен: южнее широты $-55°$ ночь (в указанном в условии смысле) не наступает, от широты $-55°$ до широты $-7°$ условие задачи может выполняться. Далее следует 60-градусный интервал от $-7°$ до $+53°$, где Солнце опускается в полночь очень глубоко под горизонт. Серединой этого интервала является широта $+23°$, на которой нижняя кульминация Солнца происходит в надире. Севернее широты $+53°$ комета в течение долгой северной (или даже непрерывной полярной) ночи может находиться над горизонтом. Итак, ответом на задачу являются два интервала широт: от $-55°$ до $-7°$ и от $+53°$ до $+90°$.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 4 балла:</u> вывод о максимальном возможном удалении ядра кометы от Солнца и определении величины этого удаления. Участники олимпиады должны использовать тот факт, что тонкий прямой газовый хвост кометы направлен в пространстве и на небе противоположно Солнцу. Необходимо также обосновать, что для выполнения условия задания (комета целиком над горизонтом) достаточно лишь убедиться в том, что выше горизонта располагается ее ядро. Без этого обоснования в явном виде оценка уменьшается на 1 балл.

<u>2 этап – 2 балла:</u> формулировка условия видимости кометы, причем в течение всей ночи. Должна включать в себя два факта: наступление ночи и возможность кометы находиться над горизонтом все это время. Указание каждого из условий оценивается по 1 баллу. Этап может быть оценен в случае наличия этих формулировок даже при невыполненном первом этапе.

<u>3 этап – 4 балла:</u> нахождение интервалов широт с учетом указанных двух ограничений (2 балла за фактор наступления ночи и 2 балла за фактор высоты Солнца в нижней кульминации выше $-60°$). В случае некорректного опускания фактора модуля или рассмотрения нижней кульминации с использованием формулы, применимой только в одном полушарии, за этап выставляется не более 2 баллов, по 1 за учет каждого фактора.

Ошибки, сделанные на первом этапе решения, не влияют на оценку за последующие этапы, если эта ошибка не лишает указанные действия смысла. Включение или исключение граничных значений широт в интервалы в ответе на оценку не влияет.

Примеры неполного решения задачи:

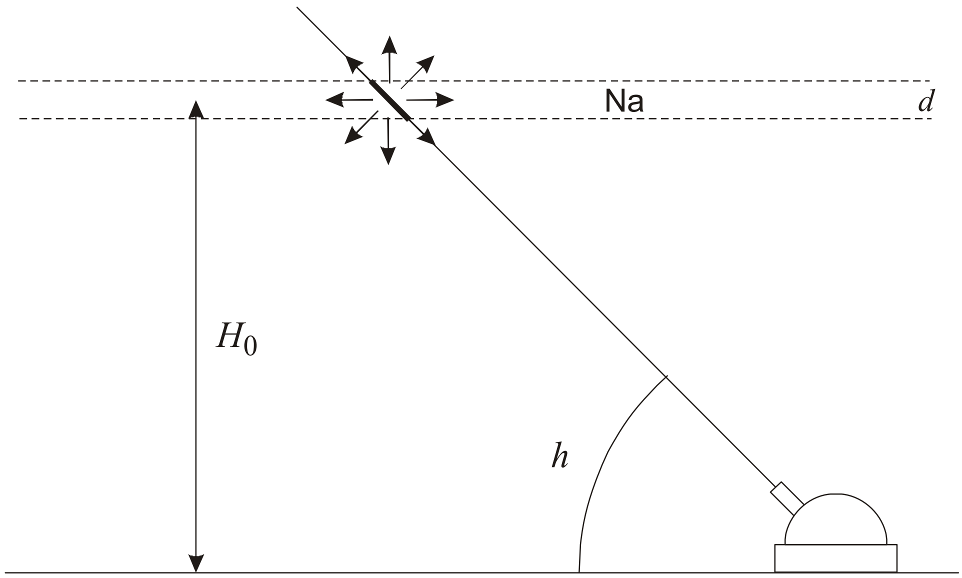
1) участник не учитывает при решении тот факт, что ночь должна наступить, и получает в ответе интервалы широт от $-90°$ до $-7°$ и от $+53°$ до $+90°$. Хотя в этом случае неверно указана только одна граница одного из интервалов, в решении полностью оценивается только первый этап в случае его выполнения, а также выставляется 1 балл за второй этап и 3 балла за третий этап. Общая оценка – не выше 7 баллов.
2) участник рассматривает оба ограничения, но использует формулу для высоты в нижней кульминации $h = -90° + (\varphi + \delta)$ без знака модуля. В итоге, он получает ответ $\varphi > 53°$, теряя интервал широт в южном полушарии. Третий этап оценивается не более 2 баллов, общая оценка – не выше 7 баллов, при условии точного выполнения первых двух этапов. Если при этом делается некорректный вывод о ситуации в южном полушарии (например, прямая аналогия $\varphi < -53°$), оценка уменьшается на 2 балла.
3) участник записывает только условие наступления ночи как единственное для наблюдения кометы, получая в итоге ограничение на широту $\varphi > -55°$. В этом случае первый этап не засчитывается полностью, за второй этап выставляется 1 балл, за третий этап – 2 балла. Максимальная оценка составляет 3 балла.

Пример альтернативного правильного решения: участник в явном или неявном виде предполагает, что комета находится точно к северу или точно к югу на небе от Солнца. Тогда, выполнив первый этап решения и предположив, что элонгация ядра кометы максимальна (60°), он может записать значения склонения ядра кометы и окончания хвоста (+37° и +23° в первом случае и −83° и +23° во втором случае). Далее записываются выражения для высот в верхней и нижней кульминации и рассмотрев все возможные случаи на момент солнечной полуночи, во время которой голова кометы окажется в нижней кульминации, а окончание хвоста – в верхней кульминации. В итоге, можно прийти к правильному ответу. Подобное решение, при условии его полноты и точности, считается правильным.

11.2. НАТРИЕВАЯ ЗВЕЗДА

Условие. Большой наземный телескоп нового поколения оснащен лазером, работающим в спектральной линии натрия с длиной волны 5890 ангстрем. Освещая слой натрия в атмосфере Земли на высоте 100 км, лазер создает "искусственную звезду". Ее свет анализируется системой адаптивной оптики телескопа для исправления атмосферных искажений над местом наблюдений. Определите, какая мощность узконаправленного лазерного луча необходима для создания в небе на высоте 45° над горизонтом искусственной звезды с визуальной звездной величиной 6^m. Вертикальную оптическую толщину слоя натрия в атмосфере Земли в спектральной линии считать равной 0.010, излучение атомов натрия изотропно. Поглощением и рассеянием света в более низких слоях атмосферы пренебречь (в реальности проблема рассеяния в нижних слоях решается небольшим смещением лазера относительно телескопа).

Решение. Слой натрия располагается достаточно высоко в атмосфере, но эта высота существенно меньше радиуса Земли. Луч лазера образует угол h=45° с горизонтом, и мы вполне можем рассматривать атмосферу как плоско-параллельную, считая, что луч пересекает слой натрия под тем же углом 45°. В реальности, учет сферичности Земли изменит этот угол всего на 1°.



Пусть d – толщина слоя натрия (она составляет несколько километров). За счет наклона луча лазера он пройдет сквозь этот слой путь $d/\sin h$. Таким же образом увеличится оптическая толщина слоя натрия для луча лазера по сравнению с вертикальной оптической толщиной τ_0:

$$\tau = \tau_0/\sin h = 0.014. \qquad (1)$$

Пусть J_0 – искомая мощность лазера. Его луч узкий и целиком пройдет через площадку, соответствующую изображению "искусственной звезды" на небе. Мощность излучения, задержанного слоем натрия, составит:

$$J = J_0\,(1 - e^{-\tau}) \approx J_0\tau = J_0\tau_0/\sin h. \qquad (2)$$

Эта величина есть фактически светимость "натриевой звезды". Мы наблюдаем эту звезду с расстояния $H = H_0/\sin h = 141$ км, H_0 – высота слоя натрия. При учете сферичности Земли мы бы получили величину 140 км, практически неотличимую от только что найденной. Количество световой энергии, проходящее через единицу площади в единицу времени вблизи телескопа, будет равно:

$$S = \frac{J}{4\pi(H_0/\sin h)^2} = \frac{J_0\tau_0}{4\pi H_0^2}\sin h. \qquad (3)$$

Следует обратить особое внимание на первую степень множителя (sin h) в этой формуле. В случае физического источника света в атмосфере мы бы имели ($\sin^2 h$). Для определения звездной величины мы сравниваем искусственную звезду с другим источником света со звездной величиной m_0 и мощностью приходящей энергии через единичную площадь S_0:

$$m - m_0 = -2.5 \lg (S/S_0). \qquad (4)$$

В качестве объекта сравнения логично выбрать Солнце с визуальной звездной величиной -26.8^m, количество поступающей энергии от которого на Земле известно. Но здесь необходимо обратить внимание на важный факт. Лазер и слой натрия не являются абсолютно черными телами, и целиком излучают на длине волны лазера и натрия, попадающую в видимую область спектра, определяющую визуальную звездную величину, указанную в условии. Излучение Солнца попадает в видимый диапазон лишь частично. Поэтому для корректного сравнения мы берем значение плотности потока энергии от Солнца S_0 в видимом диапазоне спектра (600 Вт/м^2). Теперь мы можем определить мощность лазера:

$$J_0 = \frac{4\pi H_0^2 S}{\tau_0 \sin h} = \frac{4\pi H_0^2 S_0}{\tau_0 \sin h} \cdot 10^{0.4(m_0 - m)} = 800 \text{ Вт}. \qquad (5)$$

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 3 балла.</u> Учет фактора оптической толщины, то есть того, что не вся энергия лазера будет рассеиваться слоем натрия в атмосфере. Полностью выполненным этап считается при правильном выражении светимости "натриевой звезды" в атмосфере – формула (2) или эквивалентное ей выражение.

Участник олимпиады может использовать геометрию сферической Земли при расчете угла между лучом лазера и слоем натрия. В этом случае угол меняется всего на 1°, что дает эффект в дальнейших вычислениях порядка 2%. Это не влияет на оценку в случае правильного выполнения, однако если это вызывает отклонение в 10% и более – это свидетельствует об ошибке, оценка снижается на 1 балл.

Участник олимпиады может также пытаться учесть самопоглощение излучения в слое натрия. Математически это эквивалентно сохранению общего вида формулы (2) без приближений. Однако ввиду очень малой оптической толщины слоя разница будет ничтожной: случае мы получим светимость натриевой звезды в $0.139 J_0$ вместо $0.14 J_0$, то есть эффект составляет менее 1%. Учет самопоглощения не влияет на оценку, если его эффект оказывается менее 3% от светимости натриевой звезды, при большем отклонении оценка снижается на 1 балл.

Вероятные ошибки при выполнении этапа:

1) Пропуск фактора sin h, то есть расчет светимости натриевой звезды в зените вместо высоты 45°. При отсутствии иных ошибок это приводит к фактору $\sin^2 h$ вместо $\sin h$ в

итоговой формуле решения и увеличению итоговой мощности лазера в 1.4 раза. В этом случае оценка за этап уменьшается на 1 балл.
2) Эффект полностью пропущен, светимость натриевой звезды считается равной мощности лазера. В этом случае этап полностью не засчитывается, остальные этапы, кроме финального, оцениваются в полной мере.

Этап 2 – 3 балла. Связь плотности потока энергии от натриевой звезды с ее светимостью. Основным моментом является обратная пропорциональность второй (а не четвертой) степени расстояния, так как луч узконаправленный и целиком попадает в исследуемую область атмосферы. При иных показателях степени этап не засчитывается.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: пропуск фактора увеличения расстояния до натриевой звезды из-за ее высоты над горизонтом в 45°. Это приводит к исчезновению фактора $\sin^2 h$ в первом равенстве формулы (3), а в ее втором равенстве $\sin h$ переходит из числителя в знаменатель. В итоге это приводит к двукратному занижению итоговой мощности лазера, оценка за этап уменьшается на 1 балл.

Участник олимпиады может допустить ошибки на первом и втором этапах, связанные с расположением натриевой звезды. Эффекты будут частично компенсироваться, из итогового выражения пропадет фактор ($\sin h$), а мощность лазера будет занижена в 1.4 раза. В этом случае сохраняется уменьшение оценки на 1 балл за первый этап и уменьшение на 1 балл за второй этап (итоговый эффект – уменьшение на 2 балла, также уменьшится оценка за последний этап решения).

При расчете расстояния до звезды участник может пользоваться моделью сферической Земли, но в этом случае расстояние уменьшается всего на 1 км и итоговый эффект в потоке энергии от источника на Земле составляет менее 2%. Это не влияет на оценку при правильном выполнении, но уменьшает ее на 1 балл, если эффект оказывается большим 15%.

Этап 3 – 2 балла. Сравнение натриевой звезды с другим источником света, применение формулы Погсона. Если в качестве источника берется Солнце с болометрической величиной плотности потока энергии – это увеличивает итоговую мощность лазера в 2.5 раза, за данный этап выставляется только 1 балл.

Этап 4 – 2 балла. Формулировка ответа. Выставляется при правильно выполненных предыдущих этапах и ответе. При ответе, отличном от правильного более, чем в полтора раза (в частности, из-за описанных выше причин), оценка за этап уменьшается до 1 балла, при отличии более чем в 3 раза – этап не засчитывается.

11.3. НАЧАЛО ДОЛГОГО ПУТИ

Условие. Протозвезда (будущая звезда, в недрах которой еще не начались термоядерные реакции) имеет массу, равную массе Солнца, солнечный химический состав и абсолютную звездную величину 0^m. Оцените, за какое время эта протозвезда сожмется до солнечных размеров. Считать, что во время сжатия протозвезда не вращается, не теряет массу и сохраняет постоянную эффективную температуру поверхности в 3500 K.

Решение. Определим начальные значения светимости и радиуса протозвезды из закона Стефана-Больцмана:

$$L_1 = L_0 10^{-0.4(m-m_0)} \approx 80L_0; \quad R_1 = R_0 (T_0 / T)^2 \sqrt{L_1 / L_0} \approx 25R_0. \qquad (1)$$

Здесь R_0, L_0 и T_0 – радиус, светимость и температура Солнца, T – температура поверхности протозвезды. В недрах протозвезды еще не начались термоядерные реакции, и она светит за счет своего постепенного сжатия. Гравитационная энергия протозвезды равна

$$E_G = -\gamma \frac{GM^2}{R}, \qquad (2)$$

где M и R – масса и текущий радиус протозвезды. Коэффициент γ близок к единице, в дальнейшем мы его опускаем. С течением времени радиус уменьшается, в соответствии с этим уменьшается и гравитационная энергия. Освобождающаяся энергия идет, во-первых, на нагрев недр протозвезды, а во-вторых, на излучение. Логично предположить (и это на самом деле близко к истине), что на обе цели энергия расходуется в равных количествах. Пусть в течение какого-то короткого интервала времени Δt радиус звезды изменился на ΔR (обратим внимание, что $\Delta R<0$). Тогда из всего вышесказанного мы можем записать:

$$-\Delta E_G = \frac{GM^2}{R+\Delta R} - \frac{GM^2}{R} = 2 \cdot 4\pi\sigma R^2 T^4 \Delta t. \qquad (3)$$

Здесь σ – постоянная Стефана-Больцмана. Преобразуем это выражение, учитывая, что изменение радиуса мало по сравнению с самим радиусом:

$$-\frac{GM^2 \Delta R}{R^2} = 8\pi\sigma R^2 T^4 \Delta t. \qquad (4)$$

Необходимо отметить, что с течением времени радиус и светимость протозвезды будет уменьшаться, и сжатие будет продолжаться все медленней. Последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$-\frac{\Delta R}{R^4} = \Delta\left(\frac{1}{3R^3}\right) = \frac{8\pi\sigma T^4 \Delta t}{GM^2}. \qquad (5)$$

Итак, величина $(1/R^3)$ меняется линейно со временем, то есть радиус протозвезды уменьшается пропорционально $t^{-1/3}$. В начальный момент времени радиус протозвезды равен R_1, а в конце рассматриваемого процесса он равен солнечному радиусу R_0. В итоге, мы получаем искомое значение времени:

$$\Delta t=\frac{GM^2}{8\pi\sigma T^4}\left(\frac{1}{3R_0^3}-\frac{1}{3R_1^3}\right)\approx\frac{GM^2}{24\pi\sigma R_0^3T^4}=\frac{GM^2}{6R_0L_0}\left(\frac{T_0}{T}\right)^4=4\cdot10^7\ \text{лет}. \quad (6)$$

Обратим внимание, что это время практически не зависит от начальных условий, так как на ранних этапах сжатие протозвезды происходит значительно быстрее, чем в конце. В задаче в упрощенном виде была описана стадия Хаяши сжатия протозвезды перед началом термоядерного синтеза в ее недрах.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 2 балла:</u> оценка изначального радиуса протозвезды. Если последующее решение производится правильным методом, при котором итог фактически не зависит от этого радиуса, то для полного оценивания достаточно показать, что этот радиус существенно превосходит радиус Солнца. Если участник по ходу решения обосновывает, что искомое время сжатия практически не зависит от начального радиуса протозвезды, если он существенно больше солнечного, а в этом случае это очевидно так – данного вывода достаточно для выставления 2 баллов за первый этап.

Если же последующая оценка существенно зависит от изначального радиуса или светимости протозвезды (что само по себе ошибочно и приведет к уменьшению баллов на последующих этапах), то необходимая точность оценки радиуса составляет 20%, а при двукратной ошибке в этом случае этап не засчитывается.

Вероятная ошибка участника: неверное применение закона Стефана-Больцмана, например, с учетом только фактора размера протозвезды или фактора температуры. Если при этом делается ошибка, более чем в 2 раза – этап не засчитывается полностью, при меньших ошибках за него выставляется 1 балл.

<u>2 этап – 8 баллов:</u> основная часть решения, определение требуемого времени. Оценка за этап определяется используемым методом.

Вероятные варианты неточных методов оценивания:

1) Расчет времени гравитационной релаксации – падения протозвезды самой на себя под действием только сил гравитации. Время равно половине периода движения по вырожденной эллиптической орбите с точкой апоцентра, соответствующей начальному радиусу протозвезды. Время составляет $t=(\pi^2R^3/8GM)^{1/2}=2.5$ суток. Учет конечного итогового радиуса меняет ответ незначительно. Этот абсурдный ответ подход оценивается 1 баллом только в случае правильного выполнения, при любых ошибках за этап выставляется 0 баллов.

2) Приближение постоянной светимости протозвезды, равной начальному значению. Если при этом используется правильное значение гравитационной энергии, соответствующее финальному радиусу, то время получается равным $t=(GM^2/R_0L_1)=4\cdot10^5$ лет. В этом случае оценка за этап не превышает 3 баллов. Если же в знаменатель подставляется первоначальное значение радиуса, что физически неверно, то время составляет около $1.5\cdot10^4$ лет, оценка за этап не превышает 2 баллов. Ответ может быть уменьшен в 2 раза с учетом потерь энергии на разогрев недр, в данном варианте это не влияет на оценку.

3) Приближение постоянной светимости протозвезды, соответствующей промежуточному значению радиуса $R_M=R_1/2$. Светимость составляет $L_M=L_1/4$. Если то же значение радиуса подставляется в формулу для энергии, то мы получаем время $t=(GM^2/R_ML_M)=1.2\cdot10^5$ лет, итоговая оценка за этап не превосходит 3 баллов. При подстановке в формулу для энергии конечного радиуса получаем $t=(GM^2/R_0L_M)=1.5\cdot10^6$ лет, оценка за этап не превосходит 4 баллов. Учет фактора 2 в энергии за счет разогрева недр в этом случае на оценку не влияет.

4) Приближение постоянной светимости протозвезды, соответствующей окончательному значению радиуса R_0. Светимость составляет $L_F=L_0(T/T_0)^{1/4}$. Если то же значение подставляется в формулу для энергии, то мы получаем время $t=(GM^2/R_0L_F)=2.5\cdot10^8$ лет, что в 6 раз превышает истинное значение. Максимальная оценка за этап в этом случае составляет 5 баллов, если же учтены потери энергии на разогрев недр, и время еще вдвое меньше, оценка за этап составляет 6 баллов.
5) При верном подходе, описанном выше, оценка составляет 7 баллов, если фактор 2 от потерь энергии на разогрев недр не учтен, и время оказывается вдвое большим.
6) В выражении для времени не учитывается фактор $(T/T_0)^4$, характеризующий, что протозвезда холоднее Солнца, и светимость с единицы площади у нее в 7-8 раз меньше. Это приводит к такому же уменьшению величины времени. В этом случае оценка за этап уменьшается на 3 балла, или до 0 баллов, если изначально она была менее 3 баллов.
7) При появлении иных неточных методов оценивается их обоснованность и конечный результат. Оценка соответствует такому из неточных методов, описанных выше, который, при отсутствии арифметических ошибок, дает эквивалентный по точности итог. При любом методе, если искомое время в существенной степени зависит от начального размера протозвезды, оценка за второй этап не может превышать 4 баллов.

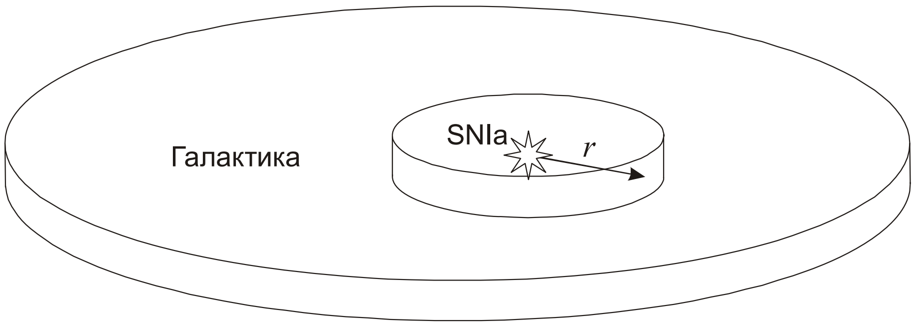
Участник может задавать коэффициент γ в выражении для энергии (формула 2), отличный от единицы. Это не влияет на оценку (хотя и изменяет ответ), если коэффициент задается от 0.6 (равномерное распределение плотности) до 1.0 (ближе к реальности для протозвезд с центральным увеличением плотности). При выходе из этого интервала оценка уменьшается на 1 балл.

11.4. ГАЛАКТИЧЕСКОЕ ШОУ

Условие. В дисковой галактике вспыхнула сверхновая звезда типа Ia. В этой галактике много звезд с обитаемыми планетными системами. На каком-то этапе после максимума сверхновая в течение отрезка времени в 100 суток ослабла ровно на 1^m, а количество жителей галактики, которые будут способны увидеть ее невооруженным глазом на текущей стадии, сократилось в полтора раза. Найдите абсолютную звездную величину сверхновой в начале и конце данного 100-дневного интервала. Галактика имеет радиус диска 20 кпк, толщину диска 300 пк, сверхновая располагается в плоскости симметрии диска неподалеку от его центра. Обитаемые планеты равномерно заполняют объем диска галактики, плотность населения также однородна и не меняется со временем. Свойства зрения жителей галактики одинаковы и идентичны людям на Земле. Диск галактики заполнен пылью, создающей эффект поглощения света ровно в 2^m на килопарсек, одинаковый во всем диске.

Решение. Мы сразу можем обратить внимание, что число потенциальных наблюдателей сверхновой за 100 суток уменьшилось не столь значительно. Действительно, для объектов с не очень большим радиусом видимости, на котором поглощение света не играет определяющей роли, ослабление источника на 1^m (в $10^{0.4}$ раз) означает уменьшение этого самого радиуса видимости в $10^{0.2} \approx 1.6$ раз. Если распределение наблюдателей однородно, то их число уменьшится в $10^{0.6} \approx 4$ раза. Мы можем предположить, что радиус видимости больше толщины диска галактики, и тогда число наблюдателей пропорционально квадрату, а не кубу радиуса видимости. Но и в этом случае ослабление источника на 1^m приведет к уменьшению числа наблюдателей в $10^{0.4} \approx 2.5$ раза. Итак, в описанной в условии картине существенную роль играет поглощение света, что естественно для столь ярких и видимых с большого расстояния источников, как сверхновые звезды.

Сверхновая располагается в плоскости симметрии диска. Мы можем указать, что радиус видимости существенно больше половины толщины диска (150 пк), так как на таком масштабе поглощение света составляет всего 0.3^m и не сказалось бы столь сильно на изменении численности наблюдателей. В дальнейшем мы сможем убедиться в правильности этого вывода. Итак, множество наблюдателей фактически образуют диск той же толщины, что и сама галактика, а их число N пропорционально r^2, где r – расстояние, с которого сверхновая будет видна на пределе возможностей человеческого зрения.



Пусть M_1 и M_2 – абсолютные звездные величины сверхновой в начале и конце 100-дневного интервала, описанного в условии задачи, а r_1 и r_2 – соответствующие предельные расстояния, с которых сверхновая может быть видна невооруженным глазом. Обозначив предельную звездную величину для невооруженного глаза как m, запишем:

$$m = M_1 - 5 + 5 \lg r_1 + E \cdot r_1,$$

$$m = M_2 - 5 + 5\lg r_2 + E\cdot r_2. \quad (1)$$

Здесь расстояния r_1 и r_2 выражается в парсеках, а величина поглощения E равна 0.002^{m}/пк. Из условия задачи нам также известно, что

$$M_1 - M_2 = -1,$$
$$N_1/N_2 = (r_1/r_2)^2 = K = 1.5. \quad (2)$$

Вычтем из первого выражения в (1) второе и учтем соотношения (2):

$$M_1 - M_2 + 5\lg(r_1/r_2) + E\cdot(r_1 - r_2) = -1 + 2.5\lg K + E\cdot(r_1 - r_2) = 0. \quad (3)$$

Отсюда мы получаем разность радиусов видимости:

$$r_1 - r_2 = \frac{1 - 2.5\lg K}{E} \approx 300\ пк. \quad (4)$$

Из формулы (4) и второго соотношения в (2) мы получаем сами расстояния: $r_1 \approx 1500$ пк, $r_2 \approx 1200$ пк. Мы видим, что это существенно больше полутолщины диска, но меньше радиуса галактики, что оправдывает упрощенную геометрию области видимости (рисунок) и второе соотношение формулы (2). Нам остается определить абсолютные звездные величины сверхновой в эти моменты:

$$M_1 = m + 5 - 5\lg r_1 - E\cdot r_1 \approx -8,$$
$$M_2 = m + 5 - 5\lg r_2 - E\cdot r_2 \approx -7. \quad (5)$$

Здесь мы взяли предельную звездную величину для невооруженного глаза $m=6$.

Возвращаясь к началу решения, отметим, что если бы мы предположили, что область видимости сверхновой меньше полутолщины диска Галактики, и $K=(r_1/r_2)^3$, коэффициент в формуле (4) вместо 2.5 составлял бы 5/3, разница расстояний $r_1 - r_2$ была бы равна 350 пк, а сами расстояния – 2750 и 2400 пк. Это существенно больше толщины диска, что приводит нас к противоречию со сделанным предположением.

Система оценивания, максимум – 10 баллов.

Оценка за все решение определяется правильностью используемого метода. При выполнении, аналогичном описанному выше, решение разделяется на несколько этапов:

<u>1 этап – 4 балла</u>: обоснованный вывод, что число наблюдающих сверхновую цивилизаций пропорционально второй степени предельного расстояния до нее. Предположение должно быть не только сделано, но и проверено на основе полученных в последующих этапах предельных расстояниях видимости сверхновой. Если это предположение не делается и не обосновывается в явном виде, но фактически используется в решении, этап оценивается в 3 балла, последующие этапы оцениваются в полной мере. При указании иной связи (например, пропорциональность кубу расстояния), этап не засчитывается, остальные этапы оцениваются в полной мере (см. далее). Подробные объяснения, приведенные выше в начале решения, не являются обязательными.

<u>2 этап – 4 балла</u>: определение предельных расстояний видимости сверхновой в два момента времени в численным или формульном виде. Этап может выполняться несколько иным способом: участник может получить отношение расстояний из условия числа наблюдаемых

цивилизаций (r_1/r_2=1.25), далее указать, что при отсутствии поглощения модули расстояний отличались бы примерно на 0.4^m, следовательно, оставшиеся 0.6^m определяются поглощением, из чего получаем разность расстояний в 0.6/0.002=300 пк. Такой подход полностью эквивалентен описанному выше. Требуемая точность определения итоговых расстояний (не разницы между ними!) составляет 100 пк, при погрешности до 300 пк, вызванной только арифметическими ошибками, оценка за этап снижается на 1 балл.

Если участник считает количество цивилизаций пропорциональным кубу предельного расстояния (фактически, не выполнив предыдущий этап решения), то в формуле (4) коэффициент 2.5 меняется на 5/3, меняется и показатель степени во втором соотношении формулы (2). Величина разности расстояний оказывается равной 350 пк, сами расстояния равны 2750 и 2400 пк, что существенно больше толщины диска Галактики. В этом случае этап засчитывается полностью при условии правильных вычислений с теми же требованиями по точности, что описаны выше. Однако, при этом участник не получает баллы за предыдущий этап решения.

Вероятная ошибка при решении: коэффициент E считается равным 2^m/пк, то есть завышается в 1000 раз. В этом случае расстояние до сверхновой оказывается порядка 1 пк, а ее светимость (см. следующий этап решения) – очень слабой. Абсурдность такого ответа должна быть очевидной для участников. Если участник оперирует и далее с такими ответами, не указывая на их неестественность, второй и третий этап решения не засчитываются полностью. Если абсурдность ответа указывается, но не исправляется, второй и третий этапы засчитываются наполовину.

Вероятное дополнение к решению: участник может попытаться учесть движение звезд и планет в галактике за то время, пока свет от сверхновой достигнет их. Ввиду того, что скорость движения звезд значительно меньше скорости распространения света, это не должно сказываться на общем количестве наблюдателей сверхновой. Оценка за решение не меняется, если участник получает в итоге такой вывод или учет движения не изменяет его численный ответ. Однако, если учет движения приводит к значимому отличию ответа, оценка за этап уменьшается на 1 балл при итоговом эффекте для предельного расстояния более 10%, на 2 балла – более 30% и на 3 балла – более 50%.

<u>3 этап – 2 балла</u>: определение абсолютной звездной величины сверхновой в начале и конце 100-дневного интервала. Участник может определить по формуле (5) только одну из величин, указав, что другая отличается на единицу. Этап засчитывается, если найдена только одна из величин, при условии верного расчета и указания, какая из двух величин найдена. Требуемая точность – 1^m, при ошибке до 2^m за этап выставляется 1 балл.

При предположении N~r^3, описанном выше, абсолютные звездные величины составляют около -12^m и -11^m. Так как эти величины вполне возможны для сверхновых на определенной стадии, этап при условии точного выполнения также засчитывается с теми же требованиями по точности. В итоге, полностью правильное решение в предположении N~r^3 (фактически, предположении большой толщины диска галактики) оценивается в 6 баллов (0+4+2).

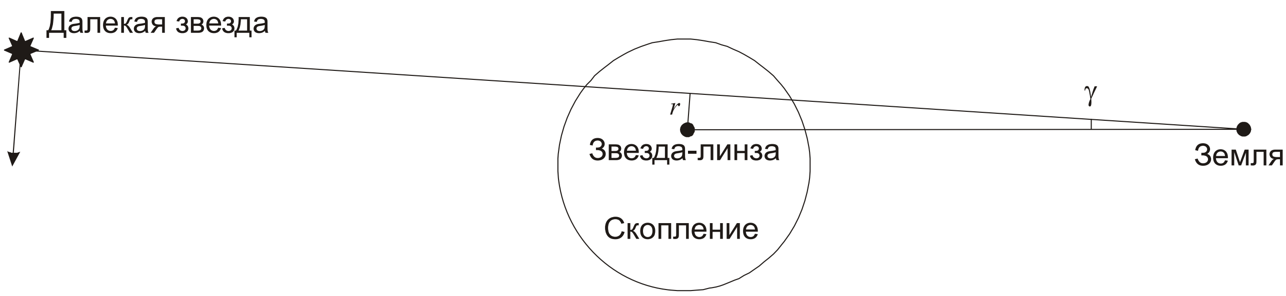
Участник может предположить иную предельную звездную величину для человеческого глаза, от 5^m до 7^m. Соответствующим образом изменится и ответ в задаче. Это не является ошибкой и на оценку не влияет.

Вероятная ошибка при решении: неверная зависимость звездной величины от расстояния при наличии поглощения (ошибки не в коэффициентах, а в самом характере зависимости). В этом случае засчитывается только первый этап решения (при условии его выполнения).

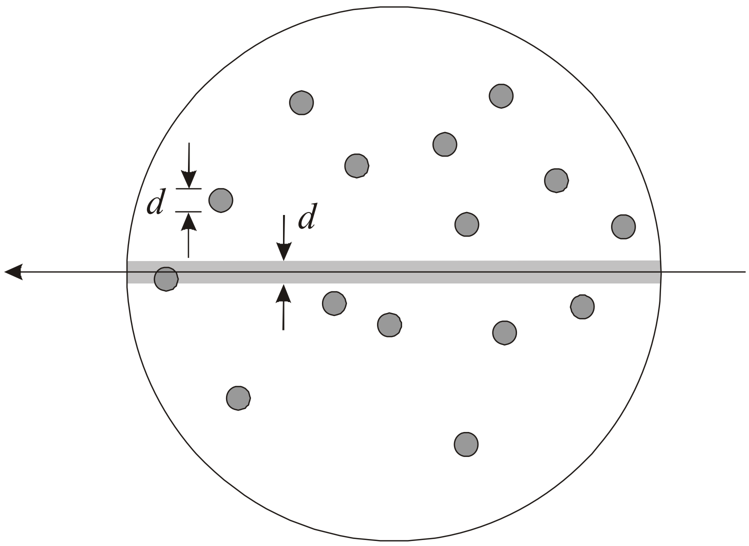
11.5. ВСПЫШКИ ЗА СКОПЛЕНИЕМ

Условие. Яркая быстрая звезда пролетает далеко позади шарового звездного скопления с массой 300 тысяч масс Солнца и диаметром 30 пк. При наблюдении в небольшой телескоп на Земле скопление имеет однородную поверхностную яркость. Видимая траектория звезды проходит за центром скопления. Во время пролета у звезды могут наблюдаться вспышки видимой яркости за счет сильного гравитационного микролинзирования на звездах скопления. Вспышка происходит, если геоцентрический угол γ между направлениями на далекую звезду-источник и звезду-линзу становится меньшим или равным $2r_G/r$ (радиан), где r – минимальное расстояние между отрезком «Земля – далекая звезда» и линзой, r_G – гравитационный радиус линзы (см. рисунок). При каком расстоянии от Земли до скопления у далекой звезды за время пролета вероятно ожидать хотя бы одну вспышку?

Считать, что скопление находится в небе Земли на эклиптике, движение далекой звезды происходит вдоль эклиптики. Собственным движением скопления и его звезд пренебречь.



Решение. Шаровое скопление состоит из N звезд со средней массой m, его суммарная масса равна $M=Nm$. Вокруг каждой из звезд на небе есть некоторая область, при попадании в которую звезды-источника произойдет его видимая вспышка за счет сильного микролинзирования. Определим угловой размер этой области.



Пусть r – пространственное расстояние между лучом и линзой, при котором может произойти вспышка. Угол, заданный в условии задачи (в реальности, это угол преломления света на этом расстоянии), составляет

$$\gamma = \frac{2r_G}{r} = \frac{4Gm}{c^2 r}. \tag{1}$$

Обозначим расстояние до скопления через L. По условию микролинзирования, угол между направлением на линзу и звезду должен сравняться с γ, то есть

$$r = L\gamma = \frac{4GmL}{c^2 r}; \quad r^2 = \frac{4GmL}{c^2}. \tag{2}$$

Обратим внимание, что для типичной звезды (возьмем к примеру Солнце) на типичном расстоянии до шарового скопления в 8 кпк величина r составляет порядка 10 а.е., что существенно больше радиуса Солнца и превышает радиус орбиты Земли. Даже если предположить, что звезда скопления маломассивна (например, с массой 0.1 массы Солнца), а скопление близкое (расстояние 3 кпк), величина r все равно составит около 2 а.е. Поэтому звезды скопления, за исключением немногочисленных гигантов, не экранируют лучи при линзировании. Диаметр видимого пятна на небе, в которое должен попасть источник, составляет

$$d = \frac{2r}{L} = \frac{4}{\mathrm{c}}\sqrt{\frac{Gm}{L}}. \tag{3}$$

За время своего пролета звезда преодолеет на небе угловой диаметр скопления D/L, где D – его пространственный диаметр. В условии задачи сказано, что скопление имеет однородную поверхностную яркость, то есть мы можем считать, что звезды распределены равномерно по видимой площади скопления. Тогда их концентрация на единицу видимой площади есть

$$n = \frac{4NL^2}{\pi D^2}. \tag{4}$$

Чтобы произошло линзирование, звезда-линза должна оказаться на небе внутри прямоугольника с длиной (D/L) и шириной d, закрашенного серым цветом на рисунке. Так как звезда движется по небу вдоль эклиптики, а движением звезд скопления мы пренебрегаем, параллактическое смещение звезд и скопления за счет орбитального движения Земли не меняет картины. Число вспышек есть число звезд скопления, которые попадут в этот прямоугольник на небе – произведение поверхностной концентрации звезд на площадь прямоугольника:

$$N_L = \frac{nDd}{L} = \frac{4NdL}{\pi D} = \frac{16N}{\pi c D}\sqrt{GmL}. \tag{5}$$

Обратим внимание, что число N_{L} возрастает с расстоянием до скопления, то есть линзирование легче заметить на звездах более далеких скоплений. По условию задачи нам надо найти расстояние, при котором число N_{L} достигнет хотя бы единицы. Расстояние до скопления в этом случае

$$L \geq L_M = \frac{\pi^2 c^2 D^2}{256 GmN^2} = \frac{\pi^2 c^2 D^2 m}{256 GM^2} \approx 8\ \text{кпк} \cdot \left(\frac{m}{m_0}\right). \tag{6}$$

Здесь m_0 – масса Солнца. Интересно, что минимальное расстояние до скопления получилось порядка расстояния до центра Галактики и типичного расстояния до ее шаровых скоплений. К тому же, это расстояние умножается на фактор (m/m_0), и если учесть, что средняя масса звезд в шаровом скоплении существенно меньше массы Солнца (массивные звезды уже проэволюционировали, а их остатки – белые карлики, нейтронные звезды и черные дыры – участвуют в микролинзировании, но имеют меньшие массы), то условию задачи могут удовлетворять и более близкие скопления. Так, если предположить среднюю массу равной $0.3m_0$, мы получаем минимальное расстояние до скопления около 2.5 кпк, что практически совпадает с расстоянием до ближайшего шарового скопления в нашей Галактике, M4.

Нужно понимать, что пролет одной звезды за скоплением может занять сотни тысяч лет. Тем не менее, большое количество звезд фона и возможность одновременно следить за всем скоплением дает шансы на обнаружение событий микролинзирования. Как мы видим из решения, эти события могут быть еще более вероятными на многочисленных телах малых масс – коричневых карликах и даже планетах. Вероятность наблюдения еще возрастает при значительных собственных движениях звезд скопления, которые мы здесь не учитывали, а для близких скоплений эффект может дать и годичный параллакс, вызванный орбитальным движением Земли.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>Этап 1 – 3 балла</u>: определение минимального углового или пространственного расстояния между лучом звезды и линзой, при котором происходит вспышка микролинзирования. Так как в выражение для r входит искомое расстояние до линзы, то сделать это можно в виде формулы (формула (2)). Принципиально важно, что пространственное расстояние (r) пропорционально квадратному корню из массы линзы и расстояния до нее, а угловое расстояние ($d/2$) – квадратному корню из массы линзы, деленной на расстояние до нее. При качественно иных видах зависимости этап полностью не засчитывается. Если получена качественно верная зависимость с ошибочным коэффициентом – оценка за этап уменьшается на 1 балл, при ошибке в коэффициенте более 4 раз оценка уменьшается на 2 балла, без влияния на оценки на последующих этапах.

Участник может попытаться учесть само преломление лучей в поле линзы, которое увеличивает радиус r. Сделать это в точности можно, зная расстояние до звезды-источника. Это приводит к появлению дополнительного числового коэффициента в формуле (2). Если этот коэффициент составляет от 1 до 2 – оценка за этап и за все задание не изменяется. При иных коэффициентах оценка за этап уменьшается на 1 балл, а при коэффициенте менее 1/2 или более 4 – на 2 балла, без влияния на оценки на последующих этапах.

Аналогично, участник может предположить, что звезда-источник имеет значительные угловые размеры, и это увеличивает вероятность линзирования. При этом звезда находится дальше скопления, ее расстояние и размеры неизвестны. Как и в случае преломления, появление коэффициента от 1 до 2 не изменяет оценку, при больших отклонениях система оценивания аналогична предыдущему случаю.

<u>Этап 2 – 5 баллов:</u> связь вероятного числа событий линзирования с характеристиками скопления и расстояния до него. Как и в предыдущем этапе, принципиальным моментом является правильная зависимость этого числа от характеристик скопления (M или N, m, D, L). При ошибке в характере зависимости этап не засчитывается полностью, если же эта ошибка вызвана неправильным выполнением предыдущего этапа – этап оценивается не выше 2 баллов. При неверном численном коэффициенте оценка снижается на 1 балл, если это не стало следствием численных ошибок на предыдущем этапе. При ошибках в коэффициентах более 4 раз оценка снижается на 2 балла, более 16 раз – на 3 балла.

Участник может выполнять этап, оперируя угловыми характеристиками (видимый размер скопления, видимый путь звезды на небе) и пространственными, пересчитывая их на расстояние до скопления. Оба подхода эквивалентны и оцениваются одинаково.

Этап 3 – 2 балла: формулировка условия для расстояния до скопления. Этап засчитывается только в том случае, если сделан вывод о том, что условие задания выполняется для расстояний, больших или равных некоторому L_M, и его значение находится как минимальное. При отсутствии этого вывода оба балла не выставляются.

Участник может найти расстояние, исходя из какого-то определенного значения средней массы звезды m либо записать универсальное соотношение (6). В первом случае этап оценивается полностью, если значение m берется от 0.1 до 1 массы Солнца. Участник может предположить некоторое распределение звезд по массам, что значительно усложнит выкладки. Такие решения оцениваются полностью, если распределение масс применимо для шаровых скоплений, в расчетах не делаются математические ошибки, а итог соответствует соотношению (6) для массы m от 0.1 до 1 массы Солнца. Если в качестве распределения взята начальная функция масс звезд (функция Солпитера), то при правильных выкладках оценка уменьшается на 1 балл, так как такой подход неприменим к шаровым скоплениям.

Возможная ошибка участника при решении: предположение, что для наблюдения линзирования все зоны от отдельных звезд покрывают все скопление на небе. Фактически, это условие, при котором вспышки происходят у звезды практически постоянно. При правильных расчетах это приводит к минимальному значению расстояния $L_M = D^2c^2/16GM =$ =3Гпк, вне зависимости от средней массы звезды. В этом случае первый этап решения оценивается полностью при условии его правильного выполнения, второй этап не оценивается, за третий этап выставляется максимум 1 балл.

11.6. СЖИМАЮЩИЙСЯ КАРЛИК

Условие. Звезда HD 49798 выглядит в телескоп как одиночная, но ее лучевая скорость колеблется с периодом T_0=1.55 дня, данные измерений лучевой скорости показаны на рисунке 1. Рядом с оптической звездой был обнаружен рентгеновский источник RX J0648.0–4418, оказавшийся белым карликом. Источник проявляет быструю переменность с периодом своего осевого вращения 13.2 секунды, но его максимумы регистрируются неравномерно, с задержкой τ, зависимость которой от орбитальной фазы также показана на рисунке 1. Еще позже выяснилось, что этот белый карлик сжимается и за счет этого ускоряет осевое вращение, его период уменьшается на $2.5 \cdot 10^{-15}$ секунды в секунду. Этот объект стал первым белым карликом, у которого был замечен процесс сжатия.

(1) Считая, что луч зрения лежит в плоскости круговых орбит двойной системы, определите массы оптической звезды и белого карлика.

(2) Пренебрегая изменением момента вращения белого карлика за счет аккреции газа с оптической звезды и считая, что он сжимается при постоянной массе, оцените, за какое время радиус белого карлика уменьшится на 1 км. Считать распределение плотности внутри белого карлика однородным. Приливное взаимодействие с оптической звездой не учитывать. На рисунке 2 приведена связь характерных значений масс и радиусов белых карликов (величины заданы в десятичных логарифмах отношения масс и радиусов к солнечным).

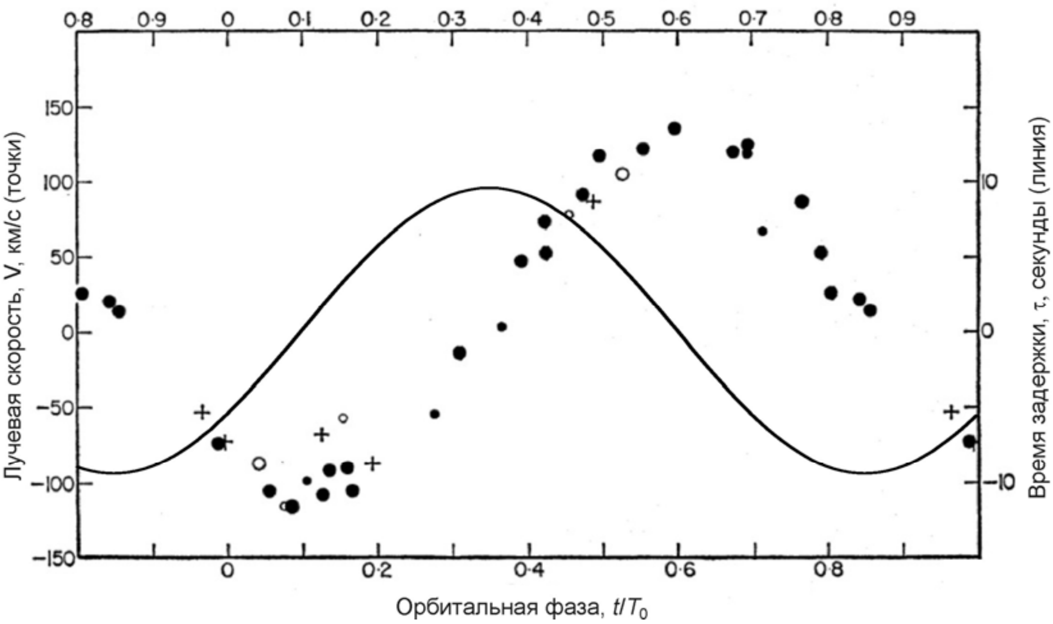


Рисунок 1.

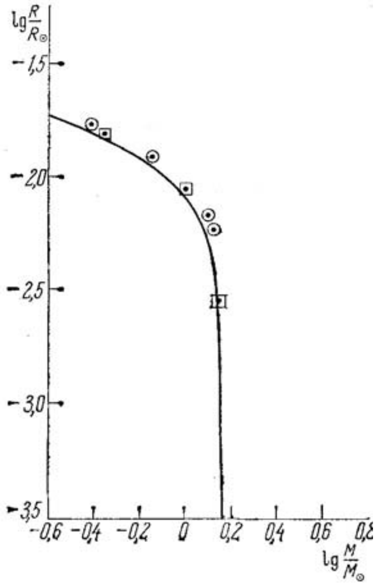
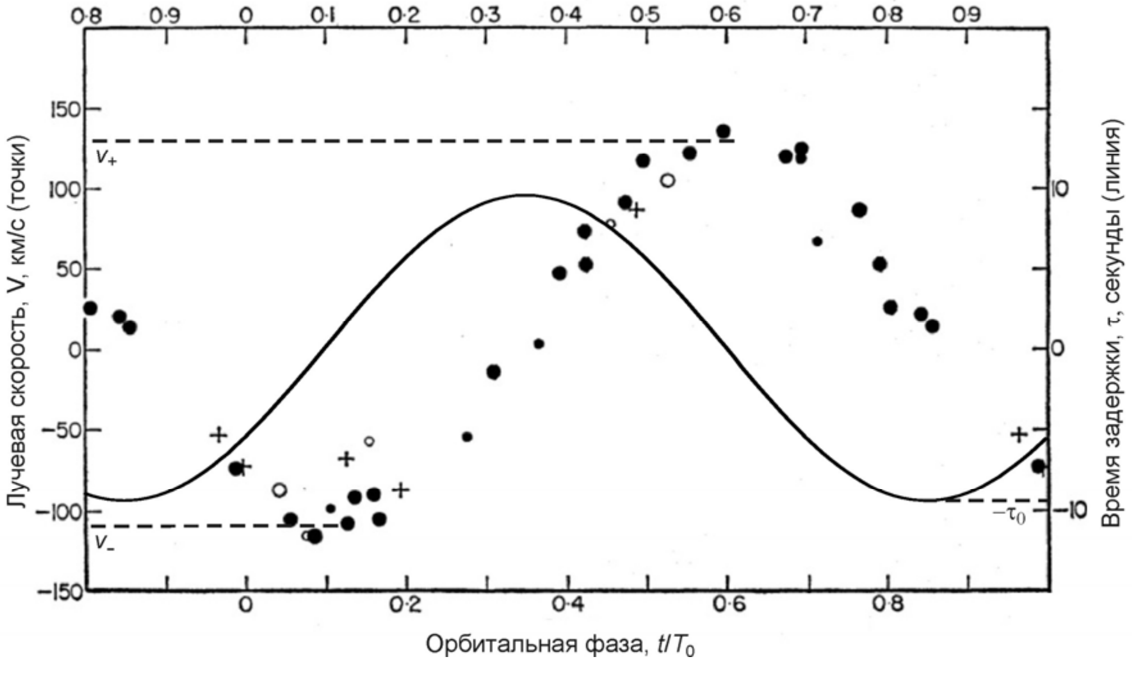


Рисунок 2.

Решение. По графику мы можем определить предельные значения лучевой скорости оптической звезды: v_{+}=+130 км/с, v_{-}=−110 км/с. Они не совпадают по модулю, следовательно, центр тяжести системы движется относительно наблюдателя со скоростью

$$u = (v_{+} + v_{-})/2 = 10 \text{ км/с}. \qquad (1)$$

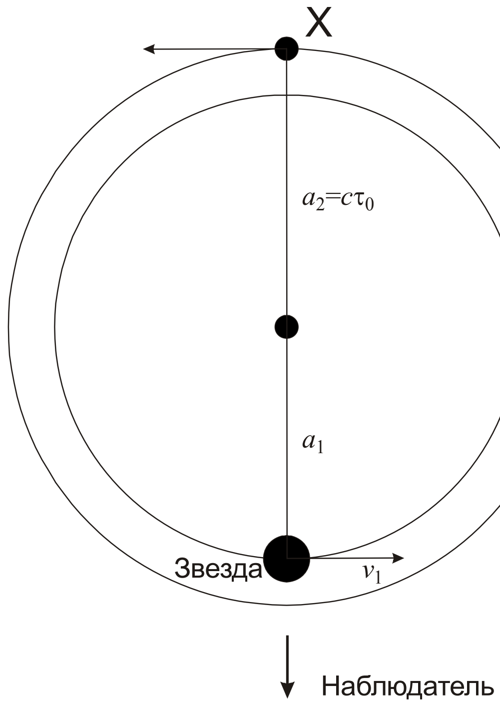


Так как луч зрения лежит в плоскости орбит звезд, орбитальная скорость оптической звезды есть

$$v_1 = v_{+} - u = u - v_{-} = 120 \text{ км/с}. \qquad (2)$$

Орбиты в системе круговые, период нам известен. Тогда мы можем определить радиус орбиты оптической звезды:

$$a_1 = \frac{v_1 T_0}{2\pi} = 0.017 \text{ а.е.} \qquad (3)$$



В момент, показанный на рисунке, когда оптическая звезда оказывается ближе всего к наблюдателю, и ее лучевая скорость сравнивается с *u* и далее возрастает, рентгеновский источник, напротив, оказывается дальше всего, и сигнал от него приходит с максимальной задержкой. По графику мы видим, что график задержки – синусоида с амплитудой τ_0=9.5 секунд. Отсюда мы получаем радиус орбиты рентгеновского источника:

$$a_2 = c\tau_0 = 0.019 \text{ а.е.} \tag{4}$$

Выражая орбитальный период T_0 в годах (0.00424 года), мы получаем величину суммы масс звезд в массах Солнца из III закона Кеплера:

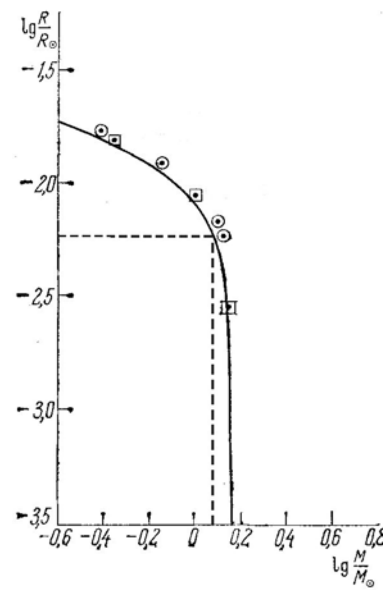
$$M = m_1 + m_2 = \frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2} = 2.6. \tag{5}$$

Чтобы определить массы тел по отдельности, вспомним, что из определения центра масс a_1m_1=a_2m_2. Тогда

$$m_{1,2} = M\,\frac{a_{2,1}}{a_1 + a_2} = \frac{a_{2,1}(a_1 + a_2)^2}{T^2}. \tag{6}$$

Масса оптической звезды получается равной 1.4 массы Солнца, масса рентгеновского источника – 1.2 массы Солнца. В действительности, обе величины на 0.1 массы Солнца больше (мы не учитывали небольшой наклон орбиты к лучу зрения).

Теперь, зная массу белого карлика, мы можем найти его характерный радиус, пользуясь зависимостью, приведенной на графике. Оговоримся, что масса белого карлика близка к предельной, поэтому погрешности в ее определении могут существенно сказаться и на величине радиуса. Однако, радиус на графике задан в логарифмическом масштабе, и точности данных задачи в принципе достаточно для оценки его величины. При массе в 1.2 массы Солнца радиус белого карлика *R* составляет 4000 км.



Пусть ω – частота вращения белого карлика в текущий момент времени. Через какое-то время Δt она станет равной $\omega+\Delta\omega$. При этом период вращения P уменьшится и станет равным $P-\Delta P$. Так как произведение частоты и периода есть постоянная величина (2π), то для малых изменений справедливо:

$$\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}=\frac{P}{P-\Delta P}=\frac{P+\Delta P}{P}. \tag{7}$$

Отсюда $\Delta\omega/\omega=\Delta P/P$. Момент инерции белого карлика в начальный момент есть $I=km_2R^2$. Величина k равна 0.4, хотя для решения данной задачи это не принципиально, важно лишь сохранение коэффициента k во времени. Через время Δt радиус уменьшается на величину ΔR. По закону сохранения момента импульса

$$km_2(R-\Delta R)^2(\omega+\Delta\omega)\approx km_2R^2\omega-2km_2R\Delta R\omega+km_2R^2\Delta\omega=km_2R^2\omega. \tag{8}$$

Отсюда

$$\Delta R=R\frac{\Delta\omega}{2\omega}=R\frac{\Delta P}{2P}. \tag{9}$$

За время Δt период изменится на величину $\Delta P=P'\Delta t$, где P' – безразмерное изменение периода, заданное в условии задачи. Теперь мы можем найти время Δt, соответствующее заданному изменению радиуса ΔR:

$$\Delta t=\frac{\Delta P}{P'}=\frac{2P\Delta R}{P'R}\approx 3\cdot 10^{12}\ с\sim 10^{5}\ лет. \tag{10}$$

За время наблюдений (около 20 лет) радиус белого карлика уменьшился примерно на 20 см, тем не менее этот эффект был фактически замечен рентгеновскими телескопами!

Источники данных:

1. Thackeray, A.D. The spectroscopic orbit of the O-type subdwarf HD 49798 // *Monthly Notices of Royal Academy of Sciences*, V.150, P.215-225, 1970.
2. Шкловский И.С. Звезды: их рождение, жизнь и смерть // М., Наука, 1985.

3. Mereghetti, S., Tiengo, A., Esposito, P., La Palombara, N., Israel, G.L., Stella, L. The discovery of a massive white dwarf in the peculiar binary system HD 49798/RX J0648.0–4418 // *Science*, V.325, P.1222, 2009.
4. Popov, S.B., Mereghetti, S., Blinnikov, S.I., Kuranov, A.G., Yungelson, L.R. A young contracting white dwarf in the peculiar binary HD49798/RX J0648.0–4418 // *Monthly Notices of Royal Academy of Sciences*, V.474, P.2750, 2018.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

1 этап – 2 балла: определение радиуса орбиты оптической звезды. Требуемая точность – 0.002 а.е., при ошибке до 0.004 а.е. оценка уменьшается на 1 балл, далее – этап не засчитывается.

Вероятная ошибка при решении: опускание фактора скорости центра масс системы. Математически это может вызвать ошибку в орбитальной скорости порядка 10 км/с и в радиусе орбиты порядка 0.001 а.е., что допустимо. Поэтому оценка не снижается, если участник оговаривает, что скорость центра масс может существовать, но в данном случае мала. Если же эффект никак не рассматривается – оценка снижается на 1 балл без влияния на последующие этапы.

2 этап – 1 балл: определение радиуса орбиты рентгеновского источника. Требуемая точность – 0.001 а.е. В частности, участники могут считать величину τ_0 равной 10 секундам, что приведет к радиусу 0.02 а.е., это не изменяет оценку.

Вероятная ошибка при решении: неверная интерпретация эффекта запаздывания. Этап не засчитывается, последующие оцениваются, если сделанная в настоящий момент ошибка не делает их абсурдными. В частности, этап не засчитывается, если на его результат каким-либо образом влияет сама величина периода рентгеновского источника (13.2 секунды).

Вероятная ошибка при выполнении 1-2 этапов: попытка учета осевого или орбитального движения Земли. В действительности, эти эффекты не могут вызывать периодичность в 1.55 дня. Осевое вращение Земли имеет период того же порядка, но дает поправку в скорости менее 0.5 км/с, а во времени запаздывания – 0.02 секунды, что существенно меньше погрешностей измерения этих величин. Орбитальное движение Земли на таких временных масштабах дает поправку только к скорости движения центра масс u, не влияя на величины v_1, r_1, r_2. Если на том или ином этапе эти эффекты учитываются и вызывают отклонения, большие требуемой точности – соответствующий этап не засчитывается.

3 этап – 2 балла: определение суммарной массы системы. Может выполняться в общем виде без численного результата, при его записи требуемая точность (без учета ошибок на предыдущих этапах) составляет 10%, при ошибке до 30% оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка при выполнении 1-3 этапов: вычисление общей массы либо массы одного из тел по III закону Кеплера из периода и радиуса орбиты какого-либо одного тела. Если берется только оптическая звезда, то масса получится около 0.3 масс Солнца, если только рентгеновский источник – около 0.4 масс Солнца (фактически, получаются значения функций масс вместо самих масс). Если эти величины фигурируют как сами массы какого-либо тела либо их сумма, то из 1-2 этапов засчитывается только тот, где делались вычисления радиусов орбит, за третий этап выставляется максимум 1 балл (при корректных вычислениях). Последующий, четвертый этап засчитывается только в том случае, если полученная величина трактуется как сумма масс, и дальше идет корректное вычисление масс по отдельности.

4 этап – 2 балла: вычисление масс каждого из тел (по 1 баллу). Требуемая точность (без учета ошибок на предыдущих этапах) – 10%.

Вероятная ошибка участника: неверное задание условия центра масс с перестановкой индексов. В результате, в качестве массы оптической звезды будет найдена масса рентгеновского источника и наоборот. 1 балл за этап не выставляется.

5 этап – 3 балла: вычисление времени, за которое радиус белого карлика уменьшится на 1 км. Необходимо обратить внимание, что незначительная погрешность определения массы белого карлика будет существенно влиять на его радиус. Это не изменяет оценку за выполнение 5 этапа, если масса не превышает предел Чандрасекара (в противном случае – см. комментарий).

Основным моментом этапа является правильная связь интервала времени, радиуса и его изменения, а также величины изменения периода (общий вид формулы (10)). При качественно ином характере связи этап не засчитывается полностью, вне зависимости от результата. При ошибке в численных коэффициентах (например, опущен фактор 2) оценка уменьшается на 1 балл. Если участник получает использует соотношение $\Delta P/P=\Delta R/R$ без обоснований через закон сохранения момента импульса, оценка уменьшается на 2 балла при отсутствии коэффициента 2 или неправильном коэффициенте и на 1 балл при правильном соотношении.

Комментарий: точности данных рисунка в принципе достаточно, чтобы получившаяся величина массы белого карлика при корректных вычислениях заведомо была меньше предела Чандрасекара. Тем не менее, участник в результате неточных вычислений может получить и большее значение. В этом случае 1-4 этапы засчитываются в соответствии с описанными выше критериями, без дополнительных штрафных санкций. Последующий, 5 этап в этом случае может быть засчитан 2 баллами, только если участник в явном виде оговаривает, что получил завышенное значение массы в результате неточности вычислений и принимает адекватное значение радиуса белого карлика (от 1000 до 6000 км). Без явного указания на факт неточности вычислений и физического несоответствия массы и природы компактной звезды 5 этап не засчитывается.

Автор заданий: О.С. Угольников,
за исключением: 9-3 (Мигающий глаз Медузы) – Е.Н. Фадеев