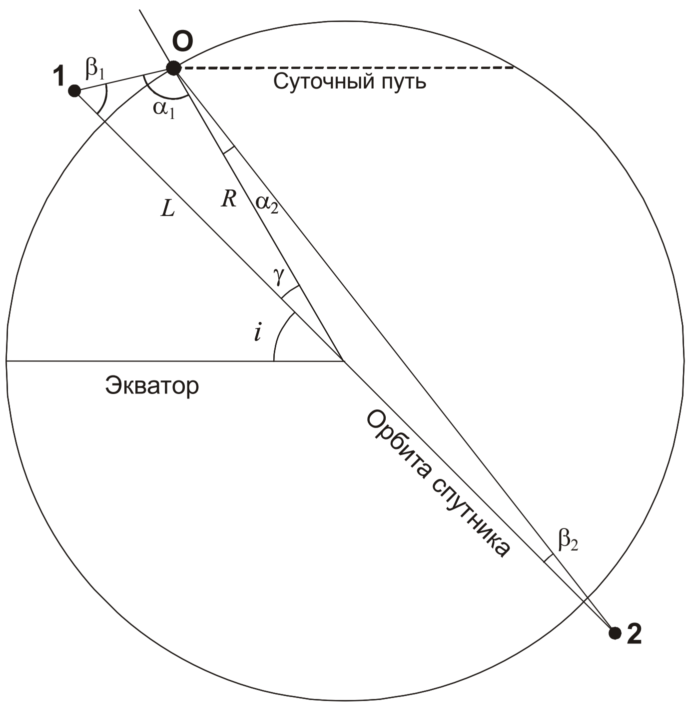
Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Заключительный этап – 2022 год
Первый (базовый) тур

БАЗОВЫЙ ТУР

9/10.1. СПУТНИК В НЕБЕ

Условие. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите. При наблюдении из некоторой точки на поверхности Земли он может располагаться на высотах от –80° (спутник под горизонтом) до +10° (спутник над горизонтом). Найдите высоту спутника над поверхностью Земли. Рефракцией пренебречь.

Решение. Изобразим Землю в плоскости, содержащей ее полюса, и перпендикулярной плоскости орбиты спутника.



Орбита спутника наклонена на некоторый угол i к плоскости экватора. Коль скоро в указанной в условии точке Земли **O** спутник не поднимается в зенит и не опускается в надир, эта точка находится на широте, по модулю большей, чем угол i. Положим для определенности, что эта точка располагается в северном полушарии, ее широта есть $i+\gamma$, причем этот угол должен быть меньше 90°. Отметим точки **1** и **2** – положения спутника, при котором он окажется на наибольшей и наименьшей высоте над горизонтом. Обратим внимание, что оба случая относятся к одному и тому же положению точки **O** в ходе ее суточного вращения, показанного пунктиром.

Обозначим как α_1 (α_2) углы между направлениями на спутник и центр Земли. Эти углы определяются высотами спутника над горизонтом:

$$\alpha_1 = 90° + h_1 = 100°;$$
$$\alpha_2 = 90° + h_2 = 10°.$$

Углы с вершинами в положениях спутника, образованные направлениями на наблюдателя и центр Земли, равны

$$\beta_1 = 180° - \alpha_1 - \gamma;$$
$$\beta_2 = 180° - \alpha_2 - (180° - \gamma) = \gamma - \alpha_2.$$

Обозначим радиус Земли как R, радиус орбиты спутника как L. Запишем выражение теоремы синусов в треугольниках «спутник – наблюдатель – центр Земли»:

$$\frac{L}{\sin\alpha_1} = \frac{R}{\sin\beta_1} = \frac{R}{\sin(\gamma+\alpha_1)};$$
$$\frac{L}{\sin\alpha_2} = \frac{R}{\sin\beta_2} = \frac{R}{\sin(\gamma-\alpha_2)}.$$

Отсюда мы получаем:

$$\frac{L}{R} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\gamma+\alpha_1)} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\gamma-\alpha_2)}.$$

Используя свойства пропорции во втором равенстве, имеем:

$$\sin\alpha_1 \sin(\gamma - \alpha_2) = \sin\alpha_2 \sin(\gamma + \alpha_1);$$
$$\sin\alpha_1 (\sin\gamma \cos\alpha_2 - \cos\gamma \sin\alpha_2) = \sin\alpha_2 (\sin\gamma \cos\alpha_1 + \cos\gamma \sin\alpha_1).$$
$$\sin\gamma (\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_1) = 2 \cos\gamma \sin\alpha_1 \sin\alpha_2.$$

В итоге,

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = 19^{\circ}.$$

Обратим внимание, что указанная в условии картина может иметь место при наклонении орбиты спутника не более 71°. Высота спутника над поверхностью Земли равна

$$H = L - R = R \cdot \left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \gamma)} - 1 \right) = 800 \text{ км}.$$

Система оценивания.

1 этап (3 балла). Правильное представление относительной конфигурации точки наблюдения и положения спутников. Для полного оценивания этапа достаточно текстового указания, что обе ситуации соответствуют одному и тому же положению наблюдателя на своем круге суточного вращения или рисунку, где будет отражен этот факт.

Вероятная ошибка участника: предположение, что случай наименьшей высоты спутника соответствует противоположному положению наблюдателя на суточном круге. В этом случае ответ оказывается функцией угла наклона орбиты спутника к экватору или широты места наблюдения, которые в условии не заданы. Таким образом, любое конкретное численное значение радиуса орбиты или высоты спутника, полученное в решении, является либо в корне неверным, либо соответствует какому-то одному значению наклона или широты, принятому участником по ходу решения. В первом случае все решение не может быть оценено выше, чем 1 баллом. Во втором случае за все решение может быть выставлено максимум 3 балла (0 баллов за первый этап и 50% баллов за оставшееся решение как за рассмотрение частного случая), если при этом не делается иных ошибок, и полученный ответ действительно соответствует принятому допущению.

2 этап (5 баллов). Вычисление радиуса орбиты спутника либо угла γ. Ответ может быть записан численно или аналитически. Возможны разные способы выполнения этапа. В частности, можно пользоваться теоремой косинусов и получать выражения для расстояния спутника от наблюдателя, что приводит к более сложным выкладкам, но также обосновано. Допустимая погрешность вычисления угла γ составляет 0.5°, что соответствует погрешности радиуса орбиты (и итоговой высоты) около 50 км.

Возможное приближенное решение: участник указывает, что радиус орбиты спутника незначительно превосходит радиус Земли, так как максимальная высота спутника невелика. Тогда мы можем приближенно считать, что $\beta_2 = \alpha_2 = \gamma/2 = 10°$, $\gamma = 20°$, и далее $H = 870$ км. Это приводит к погрешности вдвое больше допустимой, оценка за этап составляет 3 балла из 5, последний этап засчитывается наполовину (максимальная оценка за все решение – 7 баллов).

Возможное приближенное решение: графическое построение. При данном методе участник должен правильно указать взаимные конфигурации наблюдателя и спутника, соответствующие его максимальной и минимальной высоте, в частности, что они соответствуют одному и тому же положению наблюдателя на вращающейся Земле. Фактически – это выполнение первого этапа описанного выше решение, которое также оценивается в 3 балла при наличии всех обоснований. Далее участник может построить рисунок, аналогичный приведенному выше, где вместо отрезков **O1** и **O2** будут лучи, соответствующие заданным высотам спутника, а сами точки **1** и **2** однозначно выбираются на них из условия, что серединой отрезка **12** должен быть центр Земли. Этот подход считается приближенным выполнением этапа 2 и оценивается в 4 балла из 5 при верном выполнении. Последующий третий этап (определение высоты спутника) оценивается из критериев точности, описанных ниже.

Возможная ошибка при решении: участник забывает, что углы α_1 и α_2 отсчитываются в разные стороны от радиуса-вектора наблюдателя, и считает треугольник **1O2** прямоугольным. Это должно приводить к равенству радиусов орбиты спутника и Земли и нулевой высоте. Если подобный вывод делается, то за этап выставляется 1 балл, и еще 1 балл при наличии комментария о физической неосуществимости решения. Если же в этом случае получено какое-либо другое значение высоты спутника – этап не засчитывается. Во всех этих случаях также не засчитывается последний этап решения.

Этап 3 (2 балла) – вычисление высоты спутника. Оценивается в случае правильного ответа с допустимой погрешностью 50 км, при ошибке до 100 км выставляется 1 балл.

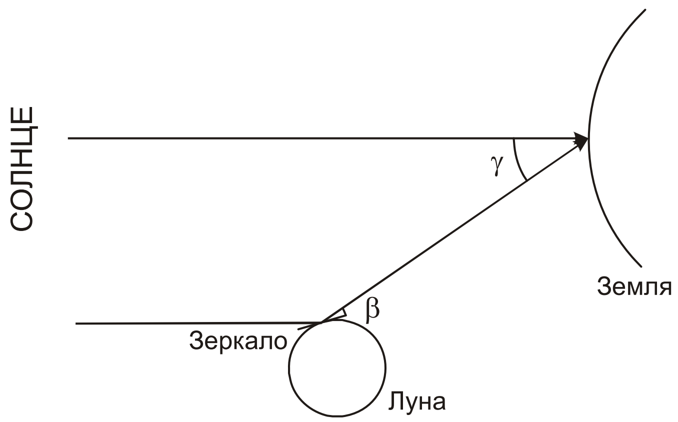
10.2. ЛУННЫЙ ОТРАЖАТЕЛЬ

Условие. На Луне установили отражатель – идеальное плоское зеркало, имеющее форму круга. В один момент зеркало отразило свет Солнца на Землю. При наблюдении с Земли в максимуме яркости пятно на Луне имело такую же звездную величину, как расположенная рядом на небе Венера в наибольшей элонгации. Определите диаметр зеркала. Орбиты Луны и планет считать круговыми, потемнение диска Солнца к краю не учитывать.

Решение. Луна расположена существенно ближе к нам, чем Солнце, а отраженное изображение Солнца будет таким же по поверхностной яркости, как и сам диск Солнца. Но угловые размеры зеркала существенно меньше угловых размеров Солнца, поэтому пятно будет существенно слабее Солнца в небе Земли.

Рядом с Луной располагается Венера, находящаяся в этот момент в наибольшей элонгации от Солнца. Этот факт дает нам возможность определить угловое расстояние между Луной и Солнцем на небе:

$$\gamma = \arcsin (L_V/L) = 46°.$$



Здесь L_V и L – расстояния от Солнца до Венеры и Земли соответственно. Чтобы зеркало в таком положении могло отразить солнечный свет на Землю, его плоскость должна располагаться под углом $\beta=\gamma/2=23°$ к линиям Земля-Луна и Луна-Солнце. Зеркало будет наблюдаться с Земли в виде эллипса. Его большая полуось равна

$$\rho = r / l,$$

где r – радиус зеркала, l – расстояние от Земли до Луны. Малая полуось эллипса будет равна $r \sin \beta$. Угловой радиус Солнца есть

$$\rho_0 = R / L,$$

где R – радиус Солнца. Соотношение видимых площадей зеркала и Солнца есть

$$\eta = \frac{\pi\rho^2 \sin\beta}{\pi\rho_0^2} = \frac{r^2 L^2 \sin\beta}{R^2 l^2}.$$

По условию задачи, зеркало светит как Венера со звездной величиной m = –4.4 (величина приведена в справочных данных). Видимая звездная величина Солнца есть m_0 = –26.8. Запишем формулу Погсона:

$$m = m_0 - 2.5\lg\eta = m_0 - 5\lg\frac{rL\sqrt{\sin\beta}}{Rl}.$$

Отсюда получаем диаметр зеркала:

$$d = 2r = \frac{2Rl}{L\sqrt{\sin\beta}} \cdot 10^{0.2(m_0 - m)} = 190 \text{ м.}$$

Система оценивания:

1 этап (1 балл): определение углового расстояния между Луной и Солнцем на небе на основе данных о находящейся рядом Венере.

Возможная ошибка участника: неправильное истолкование понятия наибольшей элонгации и запись выражения arctg (L_V/L) = 36° или arccos (L_V/L) = 44°. Этап не засчитывается, но последующие оцениваются полностью, в зависимости от их выполнения.

2 этап (2 балла): определение угла между плоскостью зеркала и направлением на наблюдателя. Засчитывается только при правильном определении (половина углового расстояния между Луной и Солнцем).

Возможная ошибка участника: первые два этапа вообще не выполняются, дальнейший анализ проводится исходя из нормального расположения зеркала по отношению к Солнцу и Земле. При отсутствии иных ошибок ответ в задаче около 120 метров. Первые два этапа не оцениваются, также на 1 балл снижается оценка за последний этап, максимальная оценка за решение составляет 6 баллов.

3 этап (4 балла): выражение для яркости отражения Солнца в зеркале. Проще всего его сделать через видимую площадь зеркала, хотя участники могут использовать и другие методы (например, записывать выражения для соответствующих потоков световой энергии, см. ниже). Величину углового радиуса или диаметра Солнца участники могут брать как известную, могут вычислять ее. Уменьшение расстояния до Луны за счет размеров Земли, если Луна находится вблизи зенита, изменяет ответ на 3 метра и не является обязательным для учета.

4 этап (3 балла): определение диаметра зеркала, точность 15 метров. При ошибке в 2 раза, вызванной путаницей понятий радиуса и диаметра, оценка уменьшается на 2 балла.

Альтернативный путь решения (3-4 этапы): расчет производится через энергетические величины. Участник может указать, что количество энергии, отражаемое зеркалом за секунду, есть $F_0 \cdot \pi r^2 \sin\beta$, где F_0 – плотность энергии от Солнца на расстоянии Земли и Луны. Далее можно указать, что около Земли эта энергия будет распределена по кругу с радиусом $l\rho_0$. Следовательно, плотность потока энергии от зеркала на Земле есть

$$F = F_0 \cdot \pi r^2 \sin\beta \,/\, \pi l^2 \rho_0^2 = F_0 \cdot r^2 \sin\beta \,/\, l^2 \rho_0^2 = F_0 \cdot r^2 L^2 \sin\beta \,/\, l^2 R^2,$$

что эквивалентно полученным выше соотношениям и соответствует выполненному второму этапу. Расчет звездных величин аналогичен, весь подход при правильном выполнении оценивается полностью.

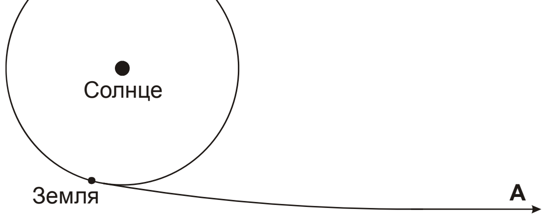
9/10.3. ПОСЛАНИЕ ЦИВИЛИЗАЦИЯМ

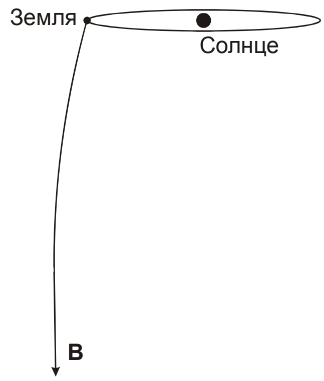
Условие. Астрономы открыли обитаемые планеты у двух далеких звезд. Одна из них (звезда А) располагалась на небе на эклиптике, другая (звезда В) – в полюсе эклиптики. Расстояние до обеих звезд оказалось одинаковым, звезды были неподвижны относительно Солнца. Было принято решение отправить к ним одинаковые космические аппараты с посланием от землян. Технические возможности позволяли отправить аппарат с Земли, придав ему стартовую геоцентрическую скорость ровно 54 км/с, далее он летел без двигателей, не встречаясь ни с какими другими телами на своем пути. Какая из двух обитаемых планет может быть достигнута аппаратом быстрее при оптимальном расчете траектории и во сколько раз? Орбиту Земли считать круговой, влиянием атмосферы Земли пренебречь.

Решение. Обозначим стартовую скорость аппарата как u_S. После запуска аппарату будет необходимо преодолеть притяжение Земли. Из закона сохранения энергии мы можем получить величину геоцентрической скорости аппарата, когда он выйдет из сферы действия Земли:

$$u_E = \sqrt{u_S^2 - u_P^2} = 52.8 \text{ км/с}.$$

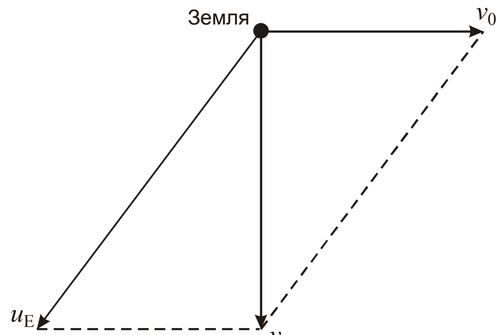
Здесь u_P – параболическая (вторая космическая) скорость для Земли, равная 11.2 км/с. Выйдя из сферы действия Земли, аппарат начнет движение по Солнечной системе. Его гелиоцентрическая скорость будет зависеть от направления движения относительно Земли и Солнца. Для полета к звезде А на эклиптике оптимально запустить аппарат так, чтобы его геоцентрическая скорость сложилась с орбитальной скоростью Земли v_0 = 29.8 км/с (рисунок слева).





Гелиоцентрическая скорость первого аппарата будет равна $v_A = u_E + v_0 = 82.6$ км/с. Со вторым аппаратом ситуация сложнее (правый рисунок сверху). Чтобы достичь звезды в полюсе эклиптики, он должен выйти на полярную орбиту, перпендикулярную плоскости эклиптики в Солнечной системе.

Обратим внимание, что из-за притяжения Солнца орбита аппарата не является прямой линией, и он не должен сразу отправляться в направлении полюса эклиптики. Тем не менее, для выхода на полярную орбиту его гелиоцентрическая скорость должна быть перпендикулярной гелиоцентрической скорости Земли. Рисунок справа изображен в плоскости, содержащей эти две гелиоцентрические скорости (но не в плоскости, перпендикулярной эклиптике).



Чтобы гелиоцентрическая скорость аппарата была направлена перпендикулярно движению Земли, его придется запускать с Земли несколько «назад» по отношению к движению нашей планеты. В итоге, гелиоцентрическая скорость аппарата составит:

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{u_{\mathrm{E}}^2 - v_0^2} = \sqrt{u_{\mathrm{S}}^2 - u_{\mathrm{P}}^2 - v_0^2} = 43.6\ \text{км/с}.$$

Такими будут гелиоцентрические скорости аппаратов вблизи Земли. Далее им предстоит преодолеть притяжение Солнца. Вновь пользуясь законом сохранения энергии, определяем скорости аппаратов при их вылете из Солнечной системы:

$$v_{\mathrm{AB0}} = \sqrt{v_{\mathrm{AB}}^2 - v_{\mathrm{P}}^2} = \sqrt{v_{\mathrm{AB}}^2 - 2v_0^2}.$$

Здесь v_{P} – параболическая скорость относительно Солнца на расстоянии Земли. В итоге, мы получаем скорости, с которыми аппараты будут двигаться к далеким звездам:

$$v_{\mathrm{A0}} = \sqrt{(u_{\mathrm{E}} + v_0)^2 - 2v_0^2} = \sqrt{u_{\mathrm{E}}^2 + 2u_{\mathrm{E}}v_0 - v_0^2} = \sqrt{u_{\mathrm{S}}^2 - u_{\mathrm{P}}^2 + 2v_0\sqrt{u_{\mathrm{S}}^2 - u_{\mathrm{P}}^2} - v_0^2} = 71.1\ \text{км/с}.$$

$$v_{\mathrm{B0}} = \sqrt{u_S^2 - u_P^2 - 3v_0^2} = 11.2\ \text{км/с}.$$

Скорость аппарата, летящего к звезде A, после вылета из Солнечной системы будет примерно в 6.3 раза больше, чем скорость аппарата, летящего к звезде B, соответственно, планета у звезды A может быть достигнута в 6.3 раза быстрее.

Система оценивания. Итоговая оценка участника будет определяться теми факторами, которые он учтет при расчете скорости аппаратов при их движении к звездам. При пропуске или неверном учете того или иного фактора данный этап не засчитывается, учет последующих факторов проводится в полной мере. Финальный этап оценивается исходя из полученного результата.

Фактор 1 (2 балла) – притяжение Земли. В реальности, оно мало влияет на движение аппарата, отправляющегося к звезде A, и даже не является обязательным для этого аппарата. В то же время, для аппарата, летящего к звезде B, учет важен. Как мы можем видеть из последней формулы решения, его пропуск даст в итоге скорость v_{B0}, равную 15.9 км/с, и соотношение времен достижения звезд около 4.5.

Фактор 2 (4 балла) – учет движения Земли. Результатом учета должны быть правильные численные или аналитические выражения для гелиоцентрической скорости аппаратов относительно Солнца вблизи Земли (по 2 балла за каждый аппарат).

Возможная ошибка участника: предположение, что аппарат B нужно просто запустить перпендикулярно движению Земли, и его гелиоцентрическая скорость будет равна геоцентрической либо даже превышать ее. 2 балла, связанные с анализом данного этапа, не выставляются.

Фактор 3 (2 балла) – учет притяжения Солнца. Результатом учета должны быть правильные численные или аналитические выражения для гелиоцентрической скорости аппаратов относительно Солнца при вылете из Солнечной системы (по 1 баллу за каждый аппарат).

Финальный этап (2 балла) – определение соотношения времен достижения звезд. Этап оценивается, если сделан вывод, что звезда A будет достигнута раньше, а соответствующее соотношение времен окажется в интервале от 6 до 7. При большей погрешности, если в ответе участника звезда A достигается раньше, а отношение оказывается больше 4 (не ограничено сверху), этап оценивается 1 баллом. При иных выводах (в том числе в случае недостижимости звезды B) этап не оценивается.

10/11.4. МИССИЯ СПАСЕНИЯ II

Условие. В далеком будущем Солнце в ходе своей эволюции будет постепенно увеличивать свою светимость, а температура его поверхности будет уменьшаться. Для сохранения жизни на Земле цивилизация научилась медленно "отодвигать" Землю от Солнца так, чтобы тепловые условия на поверхности нашей планеты оставались постоянными. Вместе с Землей от Солнца отодвигаться будет и Луна, оставаясь на современном расстоянии от Земли (вековое удаление Луны от Земли цивилизация давно остановила, чтобы не удлинялись сутки). При какой эффективной температуре Солнца на Земле прекратятся полные теневые лунные затмения? любые теневые лунные затмения? Парниковые свойства атмосферы и альбедо Земли считать неизменными, орбиты Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли – круговыми. Преломление и рассеяние света Солнца в атмосфере Земли не учитывать.

Решение. Светимость звезды с радиусом R и температурой T есть

$$J = J_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^4,$$

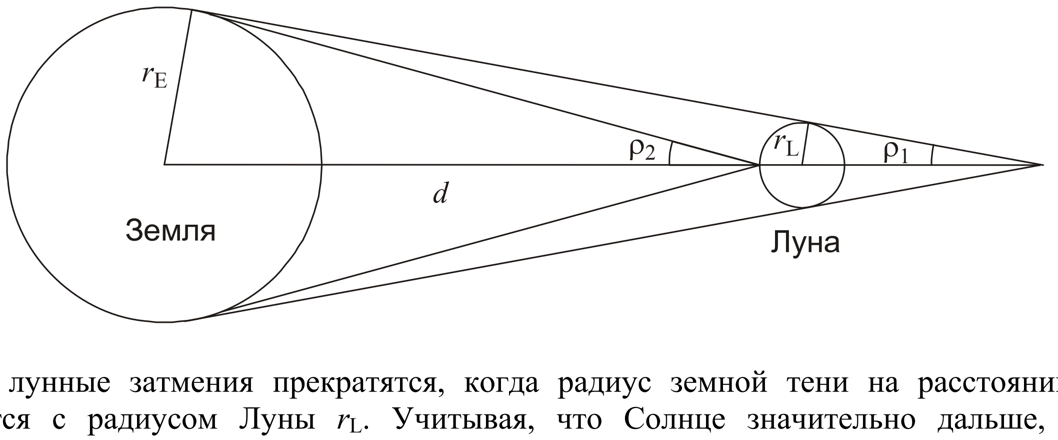
где индекс «0» относится к характеристикам современного Солнца. Поток тепловой энергии на расстоянии L от Солнца будет равен

$$F = \frac{J}{4\pi L^2} = F_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^4 \left(\frac{L}{L_0} \right)^{-2}.$$

Здесь L_0 – современное расстояние от Земли до Солнца. Чтобы сохранить тепловой поток на постоянном уровне ($F=F_0$), необходимо выполнить условие:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{R}{R_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2; \quad \rho = \frac{R}{L} = \frac{R_0}{L_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 = \rho_0 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2.$$

Итак, отодвигать Землю от Солнца нужно таким образом, чтобы видимый радиус Солнца ρ возрастал обратно пропорционально квадрату температуры поверхности Солнца.



Полные лунные затмения прекратятся, когда радиус земной тени на расстоянии Луны сравняется с радиусом Луны r_L. Учитывая, что Солнце значительно дальше, нежели расстояние между Землей и Луной d, угловой радиус Солнца для этого должен быть

$$\rho_1 = \frac{r_E - r_L}{d} = 0.0121 \text{ рад} = 0.69^\circ.$$

Во втором случае тень должна лишь дотянуться до поверхности Луны. Соответствующий угловой радиус Солнца будет равен

$$\rho_2 = \frac{r_{\mathrm{E}}}{d - r_{\mathrm{L}}} = 0.0166 \text{ рад} = 0.95^{\circ}.$$

Учитывая, что в настоящее время эффективная температура Солнца составляет 5800 K, а его видимый радиус 0.00465 радиан, мы получаем выражения для эффективных температур в указанные эпохи:

$$T_{1,2} = T_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{1,2}}}.$$

Температуры получаются равными 3600 и 3100 K соответственно.

Система оценивания:

Этап 1 (2 балла): формирование условия на угловой радиус (диаметр) Солнца либо соотношения его радиуса и расстояния, при котором на Земле будут сохраняться тепловые условия. Данный этап выполняется в общем виде, и участник должен получить корректные соотношения углового радиуса и температуры Солнца.

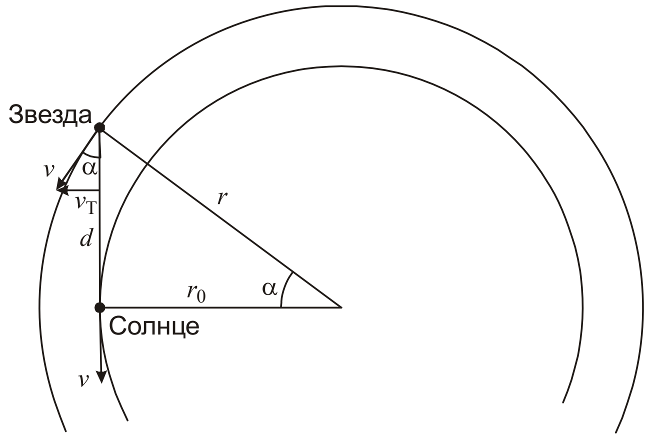
Этап 2 (6 баллов, 3+3): получение значений либо выражений для углового радиуса (диаметра) Солнца либо расстояния до него для выполнения каждого из двух условий заданий. Участник может учитывать конечное расстояние до Солнца в схеме 1, хотя это не скажется на ответе и вообще не может быть в точности сделано, так как радиус Солнца в точности неизвестен. Учет радиуса Луны в знаменателе для второго случая не является обязательным. Требуемая точность – 5%.

Этап 3 (2 балла): определение температур, точность – 100 K.

9/10.5. В ДИСКЕ ГАЛАКТИКИ

Условие. Некоторая звезда наблюдается в небе Земли в Млечном пути, в 90° от центра Галактики. Ее собственное движение на небе направлено вдоль Млечного пути и составляет 0.0050″ в год. Считая, что звезды в диске обращаются по круговым траекториям в одной плоскости в одном направлении со скоростью 230 км/с, не зависящей от расстояния до центра Галактики, определите расстояние от Солнца до звезды. Солнце удалено от центра Галактики на 8.5 кпк.

Решение. Звезда расположена в 90° от центра Галактики на небе Земли, следовательно, она располагается дальше в Галактике от ее центра, чем Солнце. Обозначим радиусы орбит Солнца и звезды в Галактике как r и r_0.



Скорость Солнца направлена в пространстве от звезды (либо к ней), и на видимое собственное движение звезды не влияет. Скорость звезды направлена под углом α к направлению на Солнце. Угловая скорость звезды при наблюдении с Солнца равна

$$\omega = \frac{v_\text{Т}}{d} = \frac{v\sin\alpha}{r_0 \operatorname{tg}\alpha} = \frac{v}{r_0}\cos\alpha .$$

Обратим внимание, что эта угловая скорость равна угловой скорости движения звезды вокруг центра Галактики (v/r). Расстояние от Солнца до звезды есть

$$d = r_0 \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{v^2 - \omega^2 r_0^2}}{\omega} \approx 4.7 \text{ кпк.}$$

Здесь угловую скорость (собственное движение) звезды ω необходимо выразить в радианах в секунду ($8\cdot10^{-16}$ рад/с), а расстояние до центра Галактики r_0 – в километрах ($2.5\cdot10^{17}$ км).

Система оценивания. Данное задание может решаться разными способами. По аналогии с конфигурациями планет, можно указать, что данная звезда является «внешней» по отношению к Солнцу и в указанный момент находится в квадратуре, тогда как Солнце по отношению к ней – в наибольшей элонгации. В этом случае угловая скорость Солнца в небе этой звезды (равная угловой скорости звезды в небе Солнца) совпадает с угловой скоростью центра Галактики, что сразу приводит нас к первой формуле решения, приведенного выше. Общая структура решения разбивается на следующие этапы:

1 этап (5 баллов) – связь угловой скорости движения звезды в нашем небе с пространственной скоростью звезд и расстоянием от центра Галактики до звезды (или до Солнца). Данная связь может быть выражена аналитически или численно или в явном виде следовать из выкладок участника. В случае ошибочной связи (например, иная функция угла α в виде множителя в первой формуле) за этап выставляется 3 балла, если ошибка не превышает 2 раз. Если же ошибка больше, а угловая скорость не равна отношению (v/r_0), умноженному на фактор, определяемым углом α – этап не засчитывается.

2 этап (5 баллов) – вычисление расстояния до звезды. Для выставления максимальной оценки значение, округленное до целых килопарсек, должно составлять 4 или 5. Если округленный до целых килопарсек ответ составляет 3 или 6 при правильном ходе решения, оценка за этап уменьшается до 4 баллов.

При больших ошибках жюри нужно обращать внимание на соотношение величин v и ωr_0 в решении участника, квадраты которых вычитаются в верном решении, приведенном выше. Если в результате численных ошибок у участника фактически получается соотношение $v \gg \omega r_0$ и, как следствие, $d = v/\omega \approx 10$ кпк, то оценка за этап не превышает 2 баллов и еще уменьшается при наличии иных ошибок.

В противоположном случае, при $v < \omega r_0$ участник должен прийти к выводу об отсутствии решения задачи. Оценка за этап в этом случае составляет 1 балл и уменьшается далее до нуля, если при подобном соотношении участник все же находит какое-то решение задания.

Если же величины v и ωr_0 (либо v/w и r_0) входят в выражение для расстояния не в виде разности квадратов (теорема Пифагора), а в ином виде (например, суммы или разности) – второй этап полностью не засчитывается.

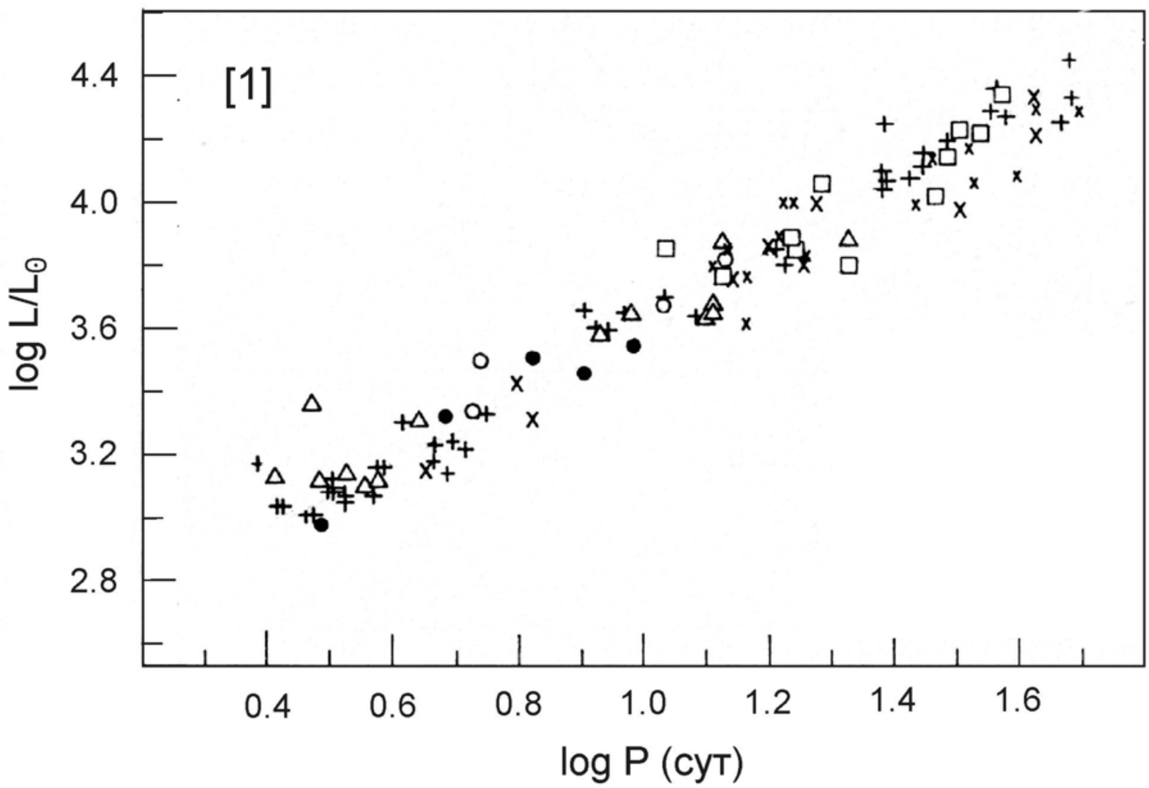
10/11.6. СУДЬБА ЦЕФЕИД

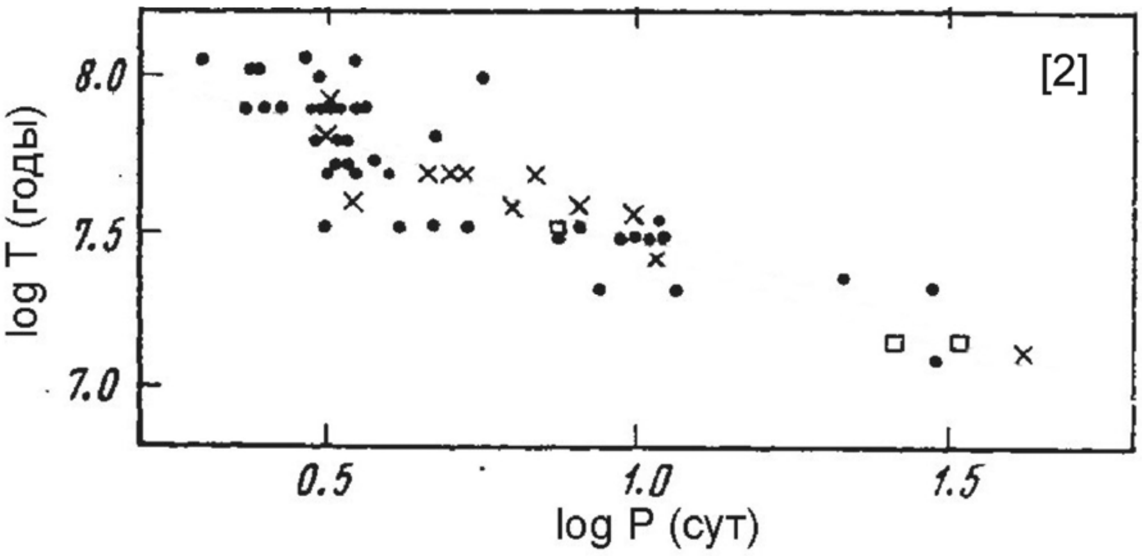
Условие. Перед Вами две диаграммы:
[1] Диаграмма «период – светимость» для некоторых цефеид нашей Галактики, Большого и Малого Магеллановых облаков, Туманности Андромеды и NGC 6822. По осям отложены десятичный логарифм периода в сутках и средний по периоду десятичный логарифм светимости по отношению к Солнцу. Разные значки относятся к разным галактикам, что для решения данной задачи принципиального значения не имеет, свойства цефеид считаются одинаковыми во всех галактиках.
[2] Диаграмма «период – возраст» для цефеид тех же галактик, выборка отличается от [1], логарифмы десятичные.

Исходя из этих диаграмм, выведите связь между абсолютными болометрическими звездными величинами одной и той же звезды на стадии главной последовательности (m_{M}) и цефеиды (средняя по периоду, m_{C}). Получите ее в виде линейного соотношения

$$m_{\mathrm{C}} = \mathrm{A}\cdot m_{\mathrm{M}} + \mathrm{B},$$

определив коэффициенты A и B. При анализе считать, что все звезды во всех указанных галактиках одиночные, при образовании имеют одинаковый химический состав, время жизни Солнца на главной последовательности равно 10 миллиардам лет. Светимость звезды на главной последовательности L_{M} считать постоянной во времени и пропорциональной M^4 (M – масса звезды), а все стадии эволюции звезд после главной последовательности – кратковременны.





Решение. Прежде всего, мы должны указать, что производить анализ и выводить соотношения мы можем только для таких характеристик звезд (их масс, светимостей), которые встречаются среди цефеид и для которых есть данные на обоих графиках.

Соотношения в обоих случаях близки к линейным. При этом, возраст цефеид определен ненадежно, что приводит к значительному разбросу экспериментальных данных. В общем случае, аппроксимация набора точек линейной зависимостью требует применения метода наименьших квадратов, приближенный подход может быть выполнен графически. Проведя прямые через точки графиков [1] и [2], мы получаем соотношения:

$$\lg (L_C/L_0) = 3.61 + 1.10 (\lg P - 1).$$
$$\lg T = 7.48 - 0.68 (\lg P - 1).$$

Обратим внимание, что в качестве параметра по оси абсцисс берется не lg P, а (lg P – 1). Это делается, чтобы ноль данного параметра попал в середину интервала наблюдательных данных, что улучшает точность определения свободных параметров данной зависимости. Выражая одно уравнение через второе, связываем светимость цефеиды с ее возрастом:

$$\lg (L_C/L_0) = 3.58 - 1.62\ (\lg T - 7.5) = 15.73 - 1.62 \lg \mathrm{T}. \qquad (*)$$

Как известно, цефеиды представляют собой желтые сверхгиганты, уже не находящиеся на главной последовательности. С учетом того, что мы считаем поздние этапы эволюции звезд кратковременными, указанный возраст цефеиды – это примерно то время, что она провела на главной последовательности. По условию мы предполагаем, что светимость звезды на главной последовательности пропорциональна ее массе в четвертой степени, то есть

$$\lg (L_M/L_0) = 4 \lg (M/M_0).$$

В этом случае время, которое звезда может провести на главной последовательности, есть

$$T = T_0\ ((M/M_0)\ /(L_M/L_0));$$

$$\lg T = \lg T_0 + \lg (M/M_0) - \lg (L_M/L_0) = 10 - 0.75 \lg (L_M/L_0).$$

Подставляем это соотношение в формулу (*):

$$\lg (L_C/L_0) = 1.2 \lg (L_M/L_0) - 0.45.$$

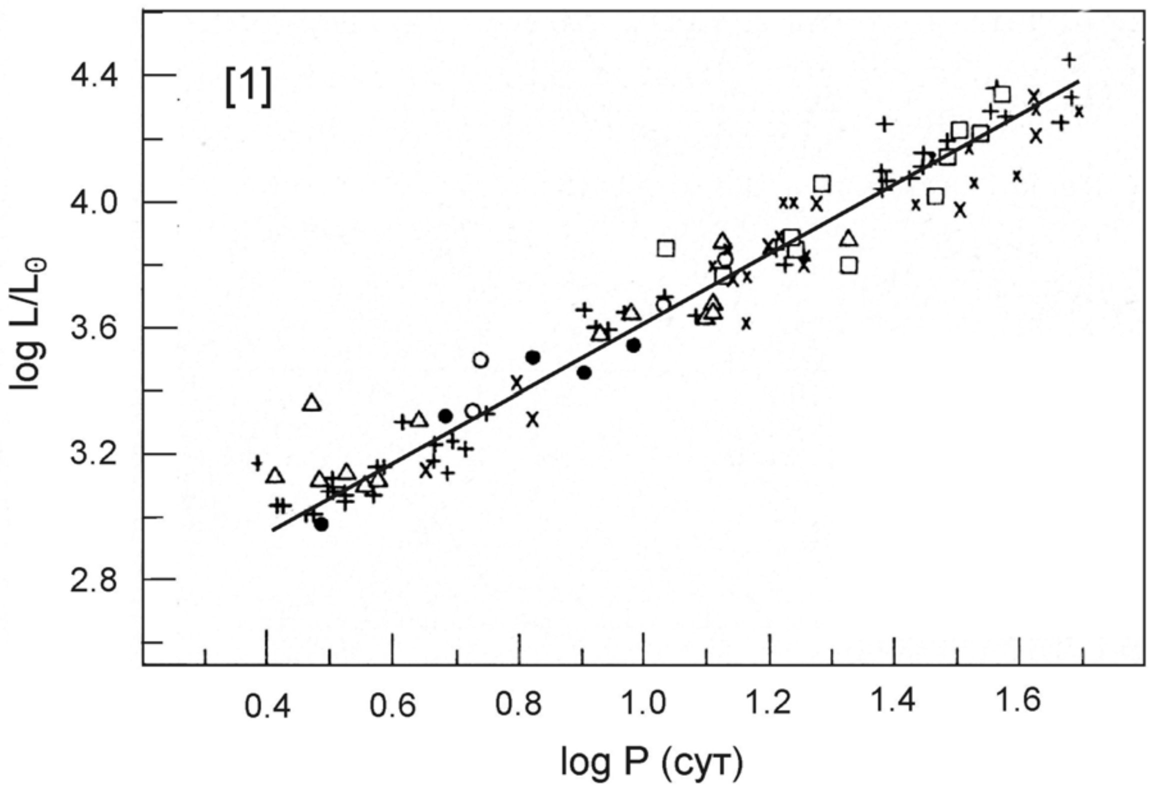
Мы получили соотношение светимостей звезды на разных стадиях эволюции. Для их перевода в абсолютные звездные величины воспользуемся формулой Погсона:

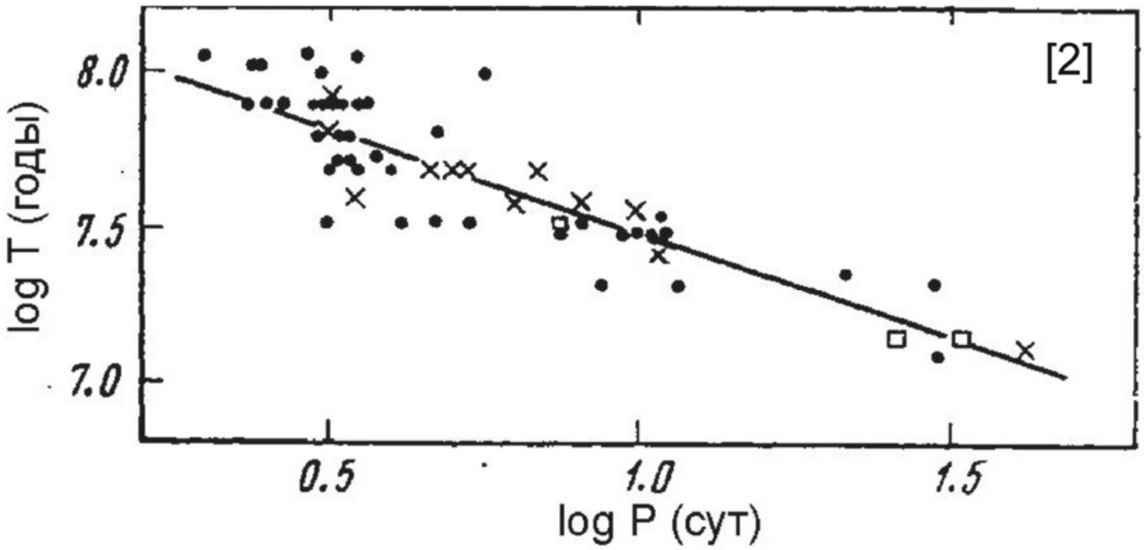
$$\lg (L_{M,C}/L_0) = 0.4\ (m_0 - m_{M,C})$$

Здесь m_0 – абсолютная болометрическая величина Солнца (+4.72). Имеем:

$$m_C = 1.2\ m_M + 0.2.$$

Мы получили ответ на вопрос задачи. Для типичных цефеид с абсолютной звездной величиной m_C=–4.0 мы получаем, что на стадии главной последовательности их абсолютная звездная величина составляла m_M=–3.5, то есть в ходе своей эволюции эти звезды мало изменили свою светимость. Это типично для звезд-сверхгигантов, коими являются цефеиды, их эволюционные треки на диаграмме Герцшпрунга-Рассела близки к горизонтальным.





Источники данных:

[1] Sandage, A., Tammann, G.A., 1968. A composite period-luminosity relation for cepheids at mean and maximum light // Astrophysical Journal, v.151, p.531.

[2] Ефремов Ю.Н., 1978. Соотношение период–возраст для цефеид // Астрономический журнал, т. 55, стр. 272.

Система оценивания.

1-2 этапы (2+2 балла): анализ графиков, восстановление параметров линейной зависимости логарифма светимости и возраста цефеиды от логарифма периода. Участник может делать это численно (метод наименьших квадратов) или графически. Оценка определяется точностью восстановленных параметров, однако при этом жюри нужно принимать во внимание, что нуль логарифма периода выходит за диапазон наблюдательных данных. Если участник находит параметры зависимости lg J и lg T от lg P, а не (lg P – 1), то погрешность свободного параметра может быть большей, и это не является основанием для снижения оценки.

Исходя из этого, необходимо оценивать точность не самих параметров линейной аппроксимации диаграмм [1-2], а величин светимости и возраста цефеид, получаемых из полученных участником зависимостей, для рабочего диапазона lg P (от 0.5 до 1.5). Их точность на всем диапазоне не должна быть хуже 0.1 для диаграммы [1] и 0.2 для диаграммы [2]. В противном случае оценка за этап уменьшается с 2 до 1 балла, при двукратном превышении погрешности – до 0 баллов, но без влияния на последующие этапы.

3 этап (2 балла). Связь светимости цефеиды с ее возрастом на основе совмещения результатов обработки обоих графиков. Может выполняться в общем или численном виде. При проверке жюри должно учитывать, что экспериментальные зависимости могут быть получены с погрешностями, и они не влияют на оценку на данном конкретном этапе. Однако, сам пересчет, выполняемый здесь, не должен вносить дополнительных погрешностей более 0.05 по lg L и lg T.

4 этап (1 балл). Связь возраста цефеиды с ее светимостью на главной последовательности на основе соотношения «масса-светимость». Ввиду простого соотношения L~M^4, предполагаемого в задании, и округленной величины времени жизни Солнца на главной последовательности (10^{10} лет) – эта зависимость должна быть выражена без погрешностей: lg T = 10 – 0.75 lg L/L_0, хотя форма ее подачи может отличаться от данной записи.

5 этап (1 балл). Связь светимостей звезды на стадии цефеиды и на стадии главной последовательности. Аналогично третьему этапу, эти вычисления не должны вносить дополнительной погрешности более 0.05 по логарифму светимости.

6 этап (2 балла). Применение формулы Погсона и восстановление связи абсолютных звездных величин на разных стадиях жизни звезды. Этап оценивается при выполнении двух условий: отсутствие дополнительных погрешностей более 0.10 по звездным величинам и физическая адекватность ответа. В частности, коэффициент при звездной величине m_M (коэффициент А в условии задачи) должен попадать в интервал от 1.0 до 1.4.

Погрешность свободного коэффициента сама по себе может быть высокой, так как абсолютные звездные величины цефеиды отличны от нуля. В результате, небольшая погрешность в коэффициенте А может сильно изменить свободный коэффициент В. Поэтому вместо самого коэффициента В нужно проверять значения абсолютной величины цефеиды m_C, соответствующие абсолютным звездным величинам на главной последовательности m_M в интервале от -2^m до -5^m. Они не должны отличаться от данных полученной выше формулы (-2.2^m и -5.8^m соответственно) не более, чем на 0.4^m. В противном случае оценка за этап уменьшается на 1 балл, при двукратном превышении допустимой погрешности – на 2 балла.