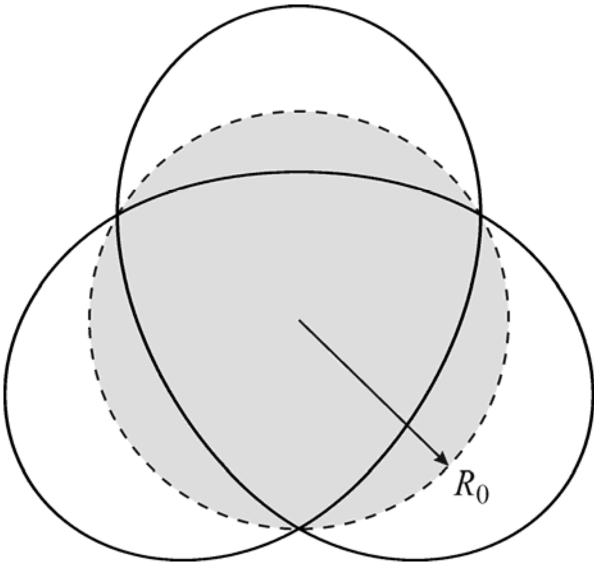
11.7. ТЕМНЫЙ ШАР I: ГАЛАКТИЧЕСКИЙ ЦВЕТОК

(О.С. Угольников)

7. Условие. Звезда движется в галактике с массивным сферическим гало из темной материи с массой M и радиусом R_0. Плотность гало постоянна внутри этой сферы. Известно, что часть траектории звезды, расположенная вне гало, представляет собой дугу эллипса с большой полуосью, равной радиусу гало R_0. Вся траектория звезды замкнута и представляет собой «цветок» с нечетным числом лепестков N>1. На рисунке в масштабе показана траектория звезды для случая N=3. Определите максимально возможное расстояние звезды от центра гало в зависимости от нечетного числа N. Каким при этом будет период прохождения всей замкнутой траектории в зависимости от N? Действие на звезду иных тел, кроме гало, не учитывать.



7. Решение. Так как рисунок выполнен в масштабе, мы по нему сразу можем решить задачу для частного случая N=3. По рисунку мы видим, что максимальное расстояние между центром гало и звездой $R_3 = 3R_0/2$. Учитывая, что большая полуось участка орбиты по условию задачи равна R_0, мы имеем значение эксцентриситета этого участка: e_3=1/2. Эти данные для частного случая, как и некоторые другие, мы можем использовать в качестве проверки общих соотношений для произвольного N.

Участок траектории орбиты вне гало является эллипсом, и звезда движется по нему в соответствии с законами Кеплера, так как гало действует на звезду как точечная масса, расположенная в центре. Как только звезда влетает в гало, ситуация изменяется. На расстоянии r от центра гало на звезду действует притяжение только той части гало, которая находится к центру ближе, чем звезда, равнодействующая от притяжения внешних частей равна нулю. В итоге, ускорение силы притяжения на расстоянии r есть

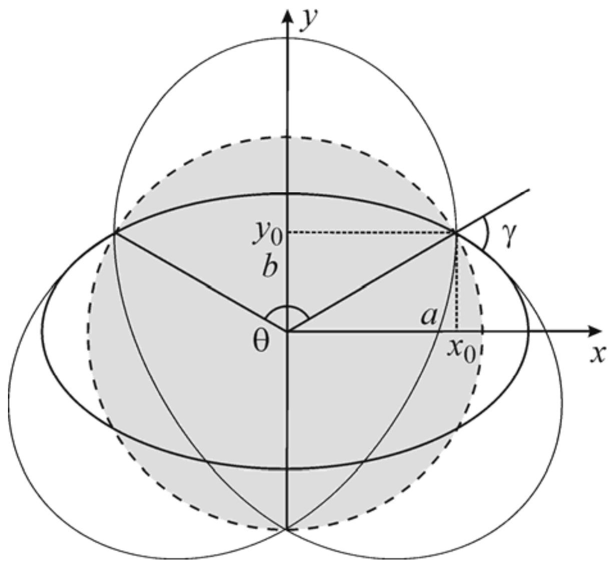
$$g(r) = -\frac{4\pi G}{3} \cdot \frac{\rho r^3}{r^2} = -\frac{GM}{R_0^2} \frac{r}{R_0}.$$

Здесь ρ – плотность темной материи в гало, знак «–» означает противоположное направление ускорения по отношению к радиус-вектору. В поле такой силы, линейно увеличивающейся с расстоянием от центра, тело совершает гармонические колебания вдоль каждой из осей. Таким образом, траектория звезды внутри гало будет также эллипсом, но теперь центр гало уже окажется в центре, а не в фокусе эллипса. Пусть ось x направлена вдоль большой оси этого эллипса. Тогда движение звезды внутри гало можно описать уравнениями:

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = b\sin\omega t.$$

Здесь ω – угловая скорость вращения вокруг гало на расстоянии R_0:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}}.$$



Скорости движения вдоль каждой из осей есть

$$v_x = -a\cdot\omega\cdot\sin\omega t,$$
$$v_y = b\cdot\omega\cdot\cos\omega t.$$

Пусть в момент входа в гало координаты звезды x и y положительны, а острый угол между траекторией и радиус-вектором равен γ. Данная точка удалена на расстояние R_0 от центра гало. По условию задачи, величина R_0 равна большой полуоси орбиты звезды вне гало. Поэтому модуль скорости равен величине круговой скорости на данном расстоянии, $v_0=\omega\cdot R_0$.

Поле тяжести гало центральное, и для движения звезды применим закон сохранения момента импульса. Сопоставим точку входа звезды в гало с моментом ее пересечения малой оси ($\omega t=\pi/2$), когда расстояние до центра равно b, а модуль скорости – $a\cdot\omega$, причем скорость перпендикулярна радиус-вектору. Тогда

$$a\cdot b\cdot\omega = \frac{a\cdot b\cdot v_0}{R_0} = v_0 R_0\sin\gamma\,;\quad a\cdot b = R_0^2\sin\gamma\,.$$

Помимо этого, для звезды применим закон сохранения энергии. В данной картине нам проще принять за ноль потенциальной энергии ($E_P=0$) центр гало. Тогда, исходя из записанного выше уравнения для гравитационного ускорения, потенциальная энергия единицы массы на расстоянии r от центра будет равна

$$\frac{E(r)}{m} = \frac{GM}{2R_0^3}\cdot r^2 = \frac{v_0^2}{2}\cdot\frac{r^2}{R_0^2}.$$

Вновь сравнив точку входа звезды в гало и ее положение на малой оси, имеем:

$$\frac{(a\cdot\omega)^2}{2} = \frac{(a\cdot v_0)^2}{2R_0^2} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{v_0^2}{2}\cdot\frac{R_0^2-b^2}{R_0^2} = \frac{v_0^2}{2}\cdot\left(2-\frac{b^2}{R_0^2}\right).$$

Отсюда мы получаем:

$$a^2+b^2 = 2R_0^2.$$

Законы сохранения момента импульса и энергии дали нам два уравнения с неизвестными величинами a и b. Мы можем решить эту систему, выразив величину b через a в законе сохранения момента импульса. Тогда

$$a^2 + \frac{R_0^4 \sin^2\gamma}{a^2} = 2R_0^2; \quad a^4 - 2R_0^2 a^2 + R_0^4 \sin^2\gamma = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно a^2, получаем:

$$a = R_0 \sqrt{1 \pm \cos\gamma}.$$

Большая полуось эллипса a больше, чем R_0, и к ней относится решение со знаком «+». Решение со знаком «–» соответствует малой полуоси b. Теперь мы можем определить координаты точки входа звезды в гало. Это проще всего сделать, найдя соответствующий параметр ωt. Для этой точки расстояние до центра и скорость равны

$$R_0^2 = a^2 \cos^2\omega t + b^2 \sin^2\omega t,$$
$$v_0^2 = \omega^2 R_0^2 = a^2\omega^2 \sin^2\omega t + b^2\omega^2 \cos^2\omega t.$$

Разделив второе уравнение на ω^2 и вычитая из него первое, имеем:

$$(a^2 - b^2) \cdot (\sin^2\omega t - \cos^2\omega t) = 0.$$

Мы знаем, что a не равно b, а координаты входа звезды в гало мы выбрали положительными (см. рисунок). В итоге, искомая точка соответствует $\omega t = \pi/4$, и ее координаты

$$x_0 = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{R_0\sqrt{2\cdot(1+\cos\gamma)}}{2}; \quad y_0 = \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{R_0\sqrt{2\cdot(1-\cos\gamma)}}{2}.$$

В ходе пролета сквозь гало звезда повернется относительно его центра на угол

$$\theta = 2\arctan\frac{x_0}{y_0} = 2\arctan\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{1-\cos\gamma}}.$$

Преобразуем данную формулу:

$$\frac{1}{\cos^2(\theta/2)} = 1 + \tan^2(\theta/2) = \frac{2}{1-\cos\gamma} = \frac{1}{\sin^2(\gamma/2)}; \quad \theta = \pi - \gamma.$$

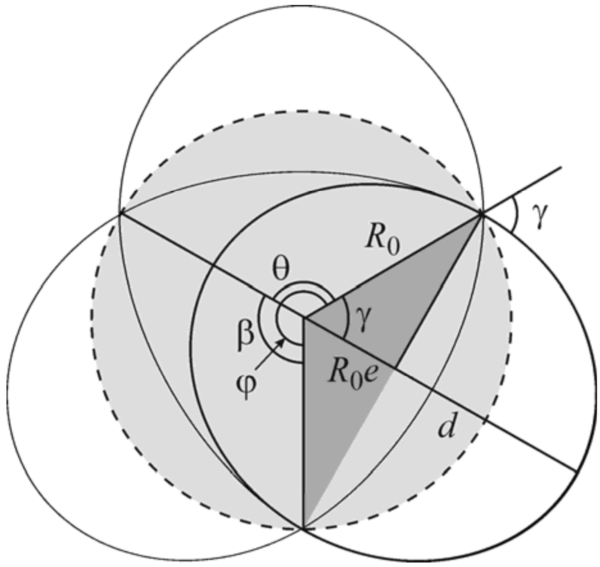
Мы можем также определить время прохождения звездой внутренней дуги траектории. Оно соответствует интервалу величины ωt от $\pi/4$ до $3\pi/4$, то есть четверти периода колебаний с частотой ω. Это время составит

$$T_{\mathrm{IN}} = \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{R_0}{v_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R_0^3}{GM}}.$$

Здесь $T_0 = 2\pi/\omega$ – период обращения вокруг гало по круговой орбите с радиусом R_0 (вдоль его границе), он же – период движения по любой траектории, полностью лежащей внутри гало.

Рассмотрим теперь часть траектории звезды вне гало. Это также эллипс, но здесь центр гало оказывается в его фокусе. У этого эллипса большая полуось равна R_0. Если бы вся масса гало была сосредоточена в центре, звезда продолжила бы движение по этому эллипсу, и по III закону Кеплера орбитальный период был бы равен T_0. Это позволяет нам определить, какое время звезда будет находиться вне гало. По II закону Кеплера, это время есть половина орбитального периода плюс еще одна его часть, соответствующая отношению площади закрашенного треугольника на рисунке к площади всего эллипса:

$$\frac{T_{\text{OUT}}}{T_0} = \frac{1}{2} + \frac{s}{S} = \frac{1}{2} + \frac{R_0^2 e\sqrt{1-e^2}}{\pi R_0^2\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}.$$



Точка входа в гало находится на его малой оси, расстояние от центра равно величине большой полуоси. Скорость звезды в этот момент параллельна большой оси эллипса. Если бы звезда продолжила бы движение по этому эллипсу, перед вылетом за сферу радиусом R_0 повернулась бы на угол

$$\varphi = 2\pi - 2\gamma = 2\theta.$$

В итоге, пролет внутри гало повернет эллиптическую орбиту звезды вне гало на угол

$$\beta = \varphi - \theta = \theta = \pi - \gamma.$$

Так как точка входа находится на малой оси эллипса, для угла γ справедливо равенство

$$\gamma = \arccos e,$$

где e – эксцентриситет внешней части орбиты звезды. В итоге, угол поворота орбиты есть

$$\beta = \pi - \arccos e = \arccos(-e).$$

Данный угол лежит в интервале от $\pi/2$ до π. Чтобы вся траектория звезды оказалась замкнутой и имела N «лепестков», за N пролетов внутри гало орбита должна повернуться на угол $2n\pi$, где n – целое число, не меньшее $N/4$, не превосходящее $N/2$ и взаимно простое с N:

$$N \cdot \beta = N \cdot (\pi - \arccos e) = 2n\pi.$$

Отсюда мы получаем выражение для эксцентриситета:

$$e = \cos\frac{\pi(N-2n)}{N}.$$

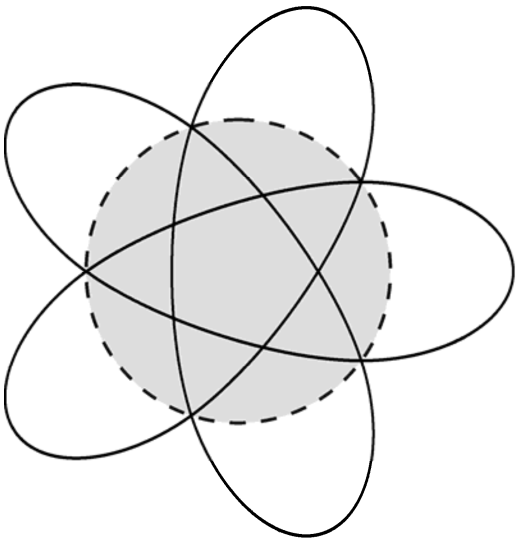
В задаче нас интересует максимально возможное расстояние от центра гало до звезды. Для фиксированной большой полуоси орбиты (R_0) оно будет достигнуто при максимальном эксцентриситете, то есть выражение под косинусом должно быть минимально возможным. В случае нечетного N это достигается при $n = (N-1)/2$, очевидно, что целые числа N и n будут взаимно просты. Эксцентриситет и максимальное расстояние звезды от центра гало составят:

$$e = \cos\frac{\pi}{N}; \quad d = R_0(1+e) = R_0 \cdot \left(1 + \cos\frac{\pi}{N}\right) = 2R_0\cos^2\frac{\pi}{2N}.$$

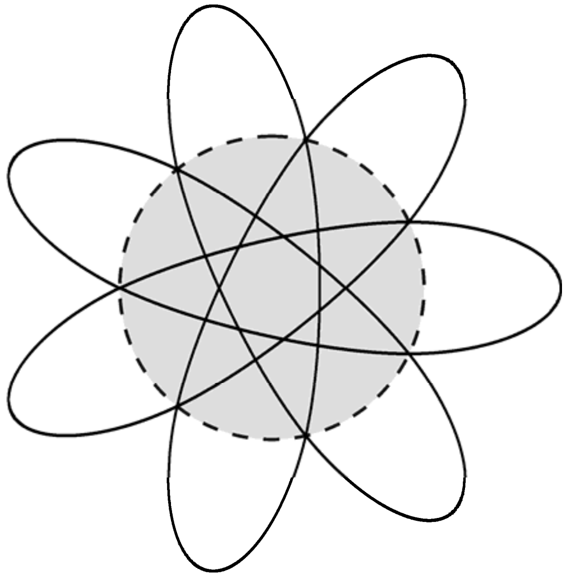
За это время звезда N раз пройдет по дуге внутри гало и N раз выйдет за его пределы. Полный период этого движения составит

$$T_{\mathrm{N}} = N \cdot (T_{\mathrm{IN}} + T_{\mathrm{OUT}}) = N \cdot T_0 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\cos(\pi / N)}{\pi} \right] = N \sqrt{\frac{R_0^3}{GM}} \cdot \left[\frac{3\pi}{2} + 2\cos(\pi / N) \right].$$

В случае $N = 3$ мы имеем $e = 0.5$ и $d = 3R_0/2$, в чем мы убедились по рисунку. Угол γ для этого случая равен $\pi/3$, углы θ и β составляют $2\pi/3$. Период T_3 есть 2.727 T_0. Далее представлены траектории звезды для случаев $N = 5$ и $N = 7$. Обратим внимание, что в случае $N = 7$ это не единственная возможная фигура с таким числом лепестков (в отличие от $N = 3$ и $N = 5$, где она может быть только одна), но именно такой вид дает максимальный эксцентриситет и максимальное удаление звезды от центра гало, что требовалось в условии задачи. При $N = 7$ и $n = 2$ звезда будет удаляться от центра на расстояние всего в 1.22 R_0.



$N = 5$, $n = 2$
$e = 0.809$, $d = 1.809\ R_0$, $T_5 = 5.038\ T_0$



$N = 7$, $n = 3$
$e = 0.901$, $d = 1.901\ R_0$, $T_7 = 7.258\ T_0$

7. Система оценивания. Оценка за решение образуется из двух основных составляющих: качество решения и качество ответа. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 15 баллов.

Часть 1 – качество решения (9 баллов). Оценка составляется, исходя из правильного анализа на соответствующем этапе решения. Ошибка, сделанная на том или ином этапе, не влияет на оценивание других этапов, но может сказаться на оценке за вторую часть (качество ответа).

<u>Этап 1 – 1 балл.</u> Восстановление зависимости гравитационной силы от расстояния от центра внутри гало.

<u>Этап 2 – 2 балла.</u> Анализ движения звезды внутри гало, составление уравнения для угла поворота звезды в процессе пролета внутри гало. В качестве аргумента может быть эксцентриситет внешней части орбиты либо угол между скоростью и радиус-вектором в момент входа звезды в гало.

<u>Этап 3 – 2 балла.</u> Анализ движения звезды внутри гало, определение времени пролета сквозь гало.

Этап 4 – 1 балл. Анализ движения звезды вне гало, составление уравнения для угла поворота звезды в процессе пролета по внешней дуге эллипса. В качестве аргумента логичнее всего использовать эксцентриситет, хотя возможны и другие варианты.

Этап 5 – 1 балл. Анализ движения звезды вне гало, определение времени нахождения на внешней дуге.

Этап 6 – 2 балла. Формирование условия для движения по замкнутой траектории с N лепестками, причем с максимальным эксцентриситетом (либо апоцентрическим расстоянием).

Комментарий: для количества лепестков, равного 3 или 5, существует только одна замкнутая траектория. При большем нечетном N таких траекторий несколько, и задание предполагает выбор правильного варианта. Если участник олимпиады рассматривает все варианты без выбора, оценка за данный этап не изменяется, но это сказывается на оценке за качество ответа. Если выбор делается, но не в пользу траекторий с максимальным расстоянием, оценка за этап уменьшается на 1 балл.

Часть 2.1. Качество ответа – максимальное расстояние (3 балла).

0 баллов:
а) Ответ отсутствует либо не соответствует расстоянию по размерности;
б) Ответ содержит какие-либо параметры, кроме R_0 и N.
в) Ответ допускает (при определенных нечетных N>1) величины d, меньшие R_0 или большие $2R_0$, что напрямую противоречит условию.

1 балл:
Для любых N величина попадает в интервал от R_0 до $2R_0$, но не является монотонно возрастающей с ростом N. К этому же случаю относится независимость величины d от N.

2 балла:
Для любых N величина попадает в интервал от R_0 до $2R_0$ и является монотонно возрастающей с ростом N, но формула не является эквивалентной правильной.

3 балла:
Полностью верная формула $d(R_0, N)$.

Часть 2.2. Качество ответа – период (3 балла).

0 баллов:
а) Ответ отсутствует либо не соответствует времени по размерности;
б) Ответ содержит какие-либо параметры, кроме R_0, M и N. К этому случаю не относится вариант, если ответ содержит величину круговой скорости v_0, и эта величина определена в явном виде через заданные в условии параметры.
в) Ответ допускает при подстановке нечетного N>1 нулевые или отрицательные периоды.
г) Величина периода в ответе может убывать с ростом N.

1 балл:
Ответ записан, имеет размерность времени и является положительной величиной, не убывающей с N (при этом ответ не удовлетворяет критериям выставления 2 или 3 баллов).

Комментарий: данное свойство выполняется, даже если участник пропустит множитель N в выражении для времени, не сделав иных ошибок.

2 балла:
Ответ записан, имеет размерность времени, возрастает с N строго быстрее, чем N в первой степени. При этом отношение $(T/(N \cdot T_0))$ не выходит за пределы от 0.75 до 1.25 ни при каких N (в реальности оно возрастает от 0.91 при $N = 3$ до 1.07 при $N \to \infty$). При этом ответ не эквивалентен верному.

3 балла:
В точности верный ответ для любого нечетного $N > 1$.

Возможное частичное решение задания: участник не проводит общего анализа или проводит его неверно для произвольного N, но делает графический анализ случая $N = 3$, приведенного в условии. В этом случае ему поэтапно выставляются:

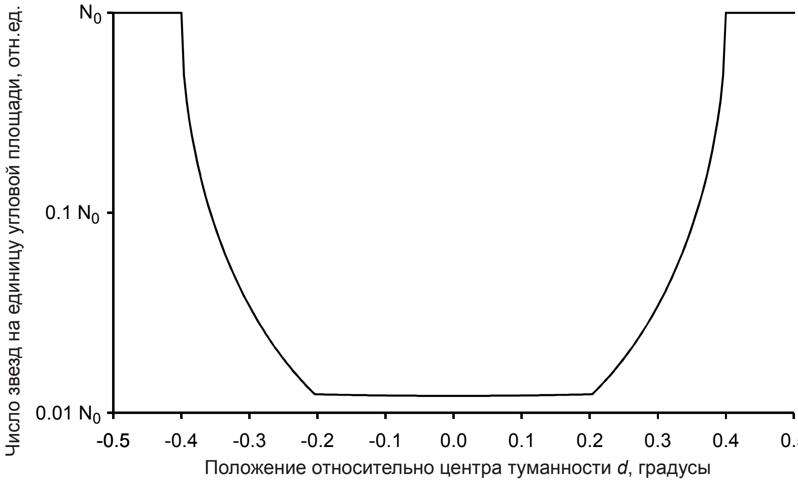
а) 1 балл за правильный ответ $d = 3R_0/2$, при условии оценки 0 за часть 2.1 решения. В противном случае данный балл не выставляется.
б) 1 балл за анализ времени нахождения на внутреннем участке траектории, если получен правильный ответ ($T_0/4$), и при условии, что за этап 3 части 1 общего решения стоит 0 баллов;
в) 1 балл за анализ времени нахождения на внешнем участке траектории, если получен правильный ответ, и при условии, что за этап 5 части 1 общего решения стоит 0 баллов;
г) 1 балл за верную оценку времени прохода всей траектории, при условии оценки 0 за часть 2.2. решения.

Если участник пытается наугад получить при этом соотношения для $N > 3$ без обоснований – они оцениваются, исходя из критериев оценивания качества ответов (части 2.1 и 2.2).

11.8. ТЕМНЫЙ ШАР II: ЗВЕЗДНОЕ ПОЛЕ

(О.С. Угольников)

8. Условие. Некоторая гигантская галактика шарообразной формы плотно заполнена звездами, аналогичными по своим свойствам Солнцу. Концентрация звезд на единицу объема одинакова во всей галактике. Астрономы, живущие неподалеку от центра галактики, измеряют плотность звезд на единицу угловой площади неба, их прибор работает в видимой области спектра и имеет проницающую способность 19.0^m. В ходе наблюдений они замечают шарообразное облако межзвездной пыли. На графике показана зависимость измеренной плотности звезд на единицу видимой площади вдоль некоторой линии неба, проходящей через центр пылевого облака. Определите физический диаметр облака и оптическую толщину вдоль его диаметра, считая распределение пыли внутри него однородным. Считать, что пыль одинаково поглощает свет любых длин волн. Межзвездным поглощением света вне облака и возможным взаимным экранированием звезд пренебречь.



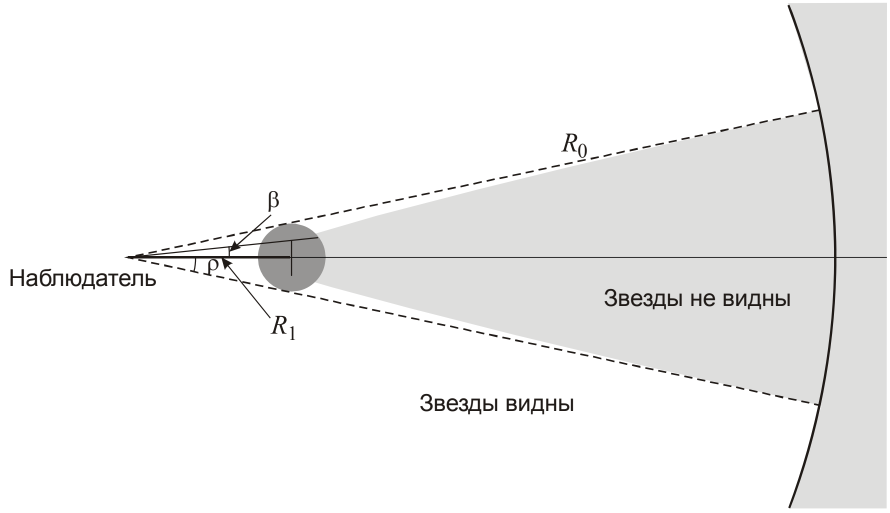
8. Решение. Наблюдения ведутся в видимой области спектра, абсолютная звездная величина Солнца для этой области равна M = +4.8. Это значение можно взять как известное, а можно получить, зная блеск Солнца на Земле. Мы можем определить максимальное расстояние, с которого Солнце будет иметь звездную величину m = 19.0, что позволит ему быть зафиксированным прибором.

$$\lg R_0 = 1 + \frac{m - M}{5} = 3.84; \quad R_0 = 6.9 \text{ кпк.}$$

Это достаточно большое расстояние, но все же меньшее радиуса крупных галактик. Поэтому мы можем считать, что все обозреваемое прибором пространство заполнено звездами.

Еще одно важное свойство, которое существенно облегчает решение – угловые размеры туманности в небе малы. Это значит, что ее пространственные размеры существенно меньше расстояния до нее, и мы можем считать, что все поглощение происходит на каком-то одном расстоянии R от наблюдателя.

Пусть в некотором направлении на расстоянии R_1 происходит поглощение с оптической толщиной τ. Тогда все звезды, расположенные позади туманности, на расстоянии r, ослабнут в $e^{-\tau}$ раз. Их звездная величина станет равной



$$m = M - 5 + 5 \lg r - 2.5 \lg e^{-\tau} = M - 5 + 5 \lg r + 2.5\tau/\ln 10.$$

Максимальное расстояние до видимой звезды R будет соответствовать ее видимому блеску 19^m:

$$19 = M - 5 + 5 \lg R + 2.5\tau/\ln 10 = M - 5 + 5 \lg R_0.$$

Отсюда мы получаем выражение для максимального расстояния, соответствующего этой оптической толщине:

$$5\lg\frac{R}{R_0} = -\frac{2.5\cdot\tau}{\ln 10}; \quad R = R_0 e^{-\tau/2}.$$

Это соотношение выполняется, пока расстояние R остается больше, чем R_1. Как только поглощение достигнет величины $\tau_1 = -2\ln(R_1/R_0)$, туманность начнет скрывать все звезды позади нее, так как их видимый блеск станет слабее 19^m. В итоге, максимальное расстояние до наблюдаемых звезд станет равным R_1 и дальше практически не будет меняться с ростом оптической толщины.

Если максимальное расстояние до наблюдаемых звезд равно R, то их число на небе в телесном угле Ω равно

$$N = \frac{n\cdot\Omega\cdot R^3}{3} = N_0\frac{R^3}{R_0^3}.$$

Здесь n – концентрация звезд в единице объема, N_0 – наблюдаемая плотность звезд на небе вне туманности. Теперь мы можем записать выражение для плотности наблюдаемых звезд в зависимости от оптической толщины на пути луча:

$$N = N_0 e^{-3\tau/2}, \quad \tau < -2\ln(R_1/R_0);$$
$$N = N_0(R_1/R_0)^3 \quad \tau \geq -2\ln(R_1/R_0).$$

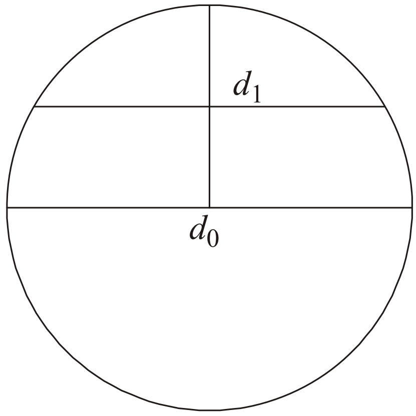
На графике мы видим характерный излом на угловом расстоянии $\beta = 0.2°$ от центра туманности. Ближе к центру туманности величина N практически постоянна. Учитывая, что ось ординат имеет логарифмический масштаб, мы измеряем по графику величину lg (N/N_0), которая равна –1.91. Таким образом, наблюдаемая плотность звезд перед центром туманности есть 0.012 от этой же величины вне туманности. Расстояние до туманности есть

$$R_1 = R_0\sqrt[3]{0.012} = 0.23\cdot R_0 = 1.6 \text{ кпк.}$$

Угловой диаметр туманности 2ρ равен 0.8° или 0.014 радиан. Пространственный диаметр пылевой туманности равен 22 пк.

Нам остается найти оптическую толщину туманности по диаметру. Для этого обратимся к точке излома зависимости на графике. Она соответствует оптической толщине

$$\tau_1 = -2\ln(R_1 / R_0) = 2.95.$$



Эта оптическая толщина соответствует пути луча d_1 на расстоянии в половину радиуса от центра туманности:

$$d_1 = 2\sqrt{(d_0/2)^2 - (d_0/4)^2} = d_0\sqrt{1-(1/4)} = d_0\sqrt{3}/2.$$

При постоянной плотности пыли оптическая толщина пропорциональна длине пути сквозь туманность. В итоге, мы получаем

$$\tau_0 = \frac{2\tau_1}{\sqrt{3}} = 3.4.$$

8. Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Определение максимального расстояния до наблюдаемых звезд, точность 10%. При выполнении участники могут взять болометрическую абсолютную звездную величину Солнца, что увеличит все линейные масштабы, рассматриваемые в задаче, на 5%. Это на оценку не влияет.

2 этап – 3 балла. Связь оптической толщины на пути луча и предельного расстояния до наблюдаемых звезд для случая, когда туманность не скрывает все звезды за собой.
Вероятная ошибка: пропуск коэффициента 1/2 перед оптической толщиной. Данный этап не засчитывается, этапы 3 и 4 оцениваются в полной мере, этапы 5 и 6 – из максимума в 2 балла за этап.

3 этап – 2 балла. Правильный учет фактора полного исчезновения звезд позади туманности при определенной оптической толщине, независимость предельного расстояния от дальнейшего увеличения оптической толщины.

4 этап – 2 балла. Выражение для количества звезд на единицу площади в зависимости от оптической толщины. Запись через телесный угол и концентрацию звезд не является обязательной, достаточно выражения через N_0.

Вероятная ошибка: отношение расстояний берется не в 3-й, а какой-либо иной степени (например, 2-й). Данный этап не засчитывается, оставшиеся оцениваются из максимума в 2 балла за этап.

5 этап – 3 балла. Определение диаметра туманности, точность 10%. При ошибке в 2 раза, вызванной путаницей радиуса и диаметра, оценка уменьшается на 2 балла (максимум 1 балл за этап).

6 этап – 3 балла. Определение оптической толщины туманности по диаметру, точность 0.1. Если в качестве ответа указывается величина, соответствующая хорде и излому зависимости на рисунке (ее правильное значение около 3) – оценка уменьшается на 2 балла (максимум 1 балл за этап).

Максимальная оценка за все решение – 15 баллов.