

## Содержание

11.1. Пульсометр .....	2
11.2. Скоростное окружение .....	5
11.3. Максимум света .....	8
11.4. Улетная задача .....	11
11.5. Элементарная задача .....	14
11.6. Яффе в профиль .....	17

## 11.1. Пульсометр

*П. А. Тараканов*

Считая, что изменение блеска классических цефеид полностью обусловлено радиальными пульсациями, а эффективная температура цефеиды при этом остается постоянной, найдите, как средняя абсолютная звездная величина цефеиды  $M$  в некоторой фотометрической полосе зависит от периода ее пульсаций  $P$ , выраженного в сутках. Известно, что для периода, равного 20 суткам, средняя абсолютная звездная величина в той же полосе равна  $M_0 = -6^m.0$ .

### Решение.

Поскольку звезды находятся в устойчивом гидростатическом равновесии, попытка вывести их из него приводит к возврату в исходное состояние: если звезду сжать, она расширится, если расширить — сожмется. При отсутствии диссипации энергии звезда будет сколь угодно долго колебаться около положения равновесия, и особенность цефеид (и других звезд, совершающих радиальные пульсации) в том, что в них есть механизм, компенсирующий диссипацию энергии в нужные моменты времени (превращающий тем самым звезду в автоколебательную систему). Оценим период таких колебаний, что можно сделать несколькими различными способами.

Пусть на поверхности звезды массы  $\mathcal{M}$  и радиуса  $R$  находится тонкий слой вещества массы  $m$ . Его движение вдоль радиуса  $r$  будет определяться уравнением

$$m\ddot{r} = -\frac{G\mathcal{M}(r)m}{r^2},$$

где  $\mathcal{M}(r)$  — масса звезды, заключенная в пределах радиуса  $r$ .

Будем считать, что плотность звезды постоянна и равна  $\rho$  (что, конечно, неверно, но в интересующем нас случае важнее примерное постоянство плотности звезды у поверхности, а это в случае цефеид является вполне неплохим приближением). Перепишем уравнение движения с учетом этого и получим

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G\rho r^3}{3r^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3} \cdot r$$

или

$$\ddot{r} + \frac{4\pi G\rho}{3} \cdot r = 0. \quad (1)$$

Получившееся очень похоже на уравнение гармонического осциллятора  $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$ , поэтому отсюда можно сделать вывод, что период колебаний

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \propto \rho^{-1/2}. \quad (2)$$

В принципе, уже на стадии записи уравнения движения можно заметить, что характерный период пульсаций должен совпасть с динамическим временем для звезды (и временем ее облета по низкой круговой орбите), после чего получить тот же результат.

Другой способ получения периода — метод размерностей. Поскольку колебания механические и температура, по условию, не меняется, сразу же можно сделать вывод, что период должен оказаться произведением  $G$ ,  $\mathfrak{M}$  и  $R$  в каких-то степенях, имеющим размерность времени. Пусть

$$[P] = [G]^\alpha \cdot [\mathfrak{M}]^\beta \cdot [R]^\gamma,$$

где квадратными скобками обозначена операция взятия размерности, а  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — некоторые неизвестные величины. Используя стандартные обозначения размерности длины, массы и времени  $L$ ,  $M$ ,  $T$ , получим, что

$$T^1 = \frac{L^{3\alpha}}{T^{2\alpha} M^\alpha} \cdot M^\beta \cdot L^\gamma,$$

откуда

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha = 1 \end{cases}$$

и  $\alpha = -1/2$ ,  $\beta = -1/2$ ,  $\gamma = 3/2$ . Это означает, что  $P \propto \mathfrak{M}^{-1/2} \cdot R^{3/2}$ , что эквивалентно уже полученному нами выводу  $P \propto \rho^{-1/2}$ .

Теперь воспользуемся тем, что светимость звезды при постоянной эффективной температуре  $\mathfrak{L} \propto R^2$ . Нам надо связать между собой средние плотность и радиус цефеиды, для чего надо вспомнить, что светимости классических цефеид (средние) отличаются на порядки, а диапазон их возможных масс невелик. В рамках изотермической модели отсюда можно сделать вывод, что изменение средней плотности обусловлено только изменением среднего радиуса — проще говоря, считать массы цефеид примерно одинаковыми.

Тогда, поскольку при фиксированной массе звезды  $R \propto \rho^{-1/3}$ , а плотность связана с периодом как  $\rho \propto P^{-2}$ , получаем, что

$$\mathfrak{L} \propto R^2 \propto \rho^{-2/3} \propto P^{4/3} \quad \text{или} \quad \mathfrak{L} = \text{const} \cdot P^{4/3}.$$

Абсолютная звездная величина определяется как

$$M = -2.5 \lg \mathfrak{L} + \text{const}$$

(все обозначенные как const константы в общем случае разные, такое обозначение позволяет не вводить в решение множество постоянных величин, используемых ровно один раз), поэтому зависимость между абсолютной звездной величиной и периодом будет иметь вид

$$M = -2.5 \lg(\text{const} \cdot P^{4/3}) + \text{const} = -2.5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \lg P + \text{const} = -\frac{10}{3} \lg P + C.$$

Последнюю «накопившуюся» константу мы обозначим  $C$ , поскольку ее значение, в отличие от предшествующих, нам надо найти. Сделать это можно, подставив в полученное выражение данные о цефеиде с 20-суточным периодом:

$$C = M_0 + \frac{10}{3} \lg P_0 = -6 + \frac{10}{3} \lg 20 \approx -1.7.$$

Теперь мы готовы записать окончательный ответ:

$$M = -3^m .3 \lg P - 1^m .7.$$

Заметим, что полученный результат верен для фотометрической полосы  $J$  (средняя длина волны  $1.2 \mu\text{м}$ ).

**Критерии оценивания.**

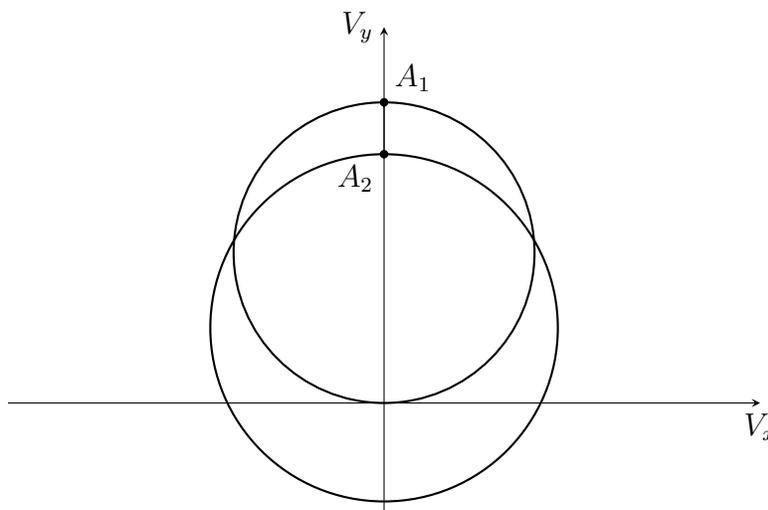
**15**

<b>К1.</b> Получение зависимости период – плотность .....	<b>7</b>
• Обоснование способа .....	<b>4</b>
• Получение верной зависимости .....	<b>3</b>
<b>К2.</b> Получение зависимости период – светимость .....	<b>6</b>
• зависимость радиус – плотность .....	<b>2</b>
• зависимость радиус – светимость .....	<b>2</b>
• зависимость период – светимость .....	<b>2</b>
<b>К3.</b> Верный численный ответ с разумной точностью .....	<b>2</b>

## 11.2. Скоростное окружение

М.И.Волобуева

Годограф скорости некоторого малого тела Солнечной системы в декартовых гелиоцентрических координатах  $(V_x; V_y)$  представляет собой окружность, касающуюся оси абсцисс в начале координат. В точке  $A_1$ , лежащей на оси ординат и не совпадающей с началом координат, тело абсолютно неупруго сталкивается с другим телом, двигавшимся по круговой орбите. Годограф скорости новой орбиты представляет собой окружность, радиус которой больше в  $2/\sqrt{3}$  раз, а центр окружности и точка  $A_2$ , соответствующая моменту столкновения, также лежат на оси ординат между точками  $A_1$  и началом координат.



Найдите эксцентриситеты орбит малого тела до и после столкновения, а также отношение массы первого тела к массе второго, если известно, что оба тела и до, и после столкновения двигались в плоскости эклиптики. Обратите внимание: рисунок сделан только для пояснения условия задачи, определять по нему количественные данные *нельзя*.

На всякий случай напомним, что годограф — геометрическое место точек, координаты которых равны компонентам некоторого переменного вектора (в частности вектора скорости).

### Решение.

Годограф скорости начальной орбиты проходит через начало координат, то есть минимальная скорость на орбите равна нулю. Это соответствует параболической траектории. Таким образом, можно сразу ответить на вопрос об эксцентриситете начальной орбиты:  $e_0 = 1$ .

Новая орбита, очевидно, является эллиптической: годограф скорости для окружности ввиду постоянства модуля орбитальной скорости был бы окружностью с центром в начале координат, а годограф для гиперболической траектории представлял бы собой только *часть* окружности, так как гипербола заключена между своими асимптотами и вектор скорости не делает «полного разворота» на  $360^\circ$ .

Также отметим, что точки  $A_1$  и  $A_2$  являются максимально удаленными от начала координат точками соответствующих годографов, то есть соответствуют максимумам скорости. Таким

образом, точка столкновения соответствует перигелию как для начальной, так и для новой орбиты. Кроме того, после столкновения скорость малого тела уменьшилась, но сохранила свое направление. Так как при неупругом столкновении суммарный импульс сохраняется, то это значит, что в момент столкновения скорости обоих тел были коллинеарны.

Определим, как изменилась скорость после столкновения. Для этого надо понять, как радиус годографа зависит от орбитальных параметров. В случае параболической траектории диаметр окружности годографа равен скорости в перигелии, то есть

$$R_0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2GM_\odot}{d}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{2d}}, \quad (3)$$

где  $d$  — расстояние от Солнца до точки столкновения.

Для эллиптической орбиты радиус годографа равен полусумме скоростей в афелии и перигелии:

$$R = \frac{V_a + V_p}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{\frac{GM_\odot}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}} + \sqrt{\frac{GM_\odot}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \right) = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a(1-e^2)}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{d(1+e)}}. \quad (4)$$

Теперь из (3) и (4) можно найти эксцентриситет новой орбиты:

$$\frac{R}{R_0} = \sqrt{\frac{2}{1+e}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad e = 0.5.$$

Осталось найти соотношение масс  $m_1/m_2$ . Второе тело до столкновения двигалось по круговой орбите со скоростью, равной  $v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{d}}$ . Тогда скорость первого тела до столкновения была равна  $v\sqrt{2}$ , а после столкновения стала равной  $v\sqrt{1+e} = v\sqrt{3/2}$ .

Если скорости первого и второго тела до столкновения были сонаправлены, то из закона сохранения импульса имеем

$$m_1 v \sqrt{2} + m_2 v = (m_1 + m_2) v \sqrt{3/2},$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{3/2} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3/2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} \approx 1.186.$$

Напротив, если столкновение произошло «в лоб», то

$$m_1 v \sqrt{2} - m_2 v = (m_1 + m_2) v \sqrt{3/2},$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{3/2} + 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3/2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} \approx 11.742.$$

Итоговые ответы: начальный эксцентриситет  $e_0 = 1$ , итоговый эксцентриситет  $e = 0.5$ , отношение масс  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}}$ .

<b>Критерии оценивания.</b>	<b>15</b>
<b>К1.</b> Анализ начальной орбиты .....	<b>2</b>
• Почему это парабола .....	<b>1</b>
• Запись $e = 1$ в явном виде .....	<b>1</b>
<b>К2.</b> Анализ конечной орбиты .....	<b>7</b>
• Это эллипс .....	<b>1</b>
• Радиус годографа через орбитальные параметры: обоснование .....	<b>2</b>
• Радиус годографа через орбитальные параметры: результат .....	<b>2</b>
• Ответ $e = 0.5$ .....	<b>2</b>
<b>К3.</b> Соотношение масс .....	<b>6</b>
• Закон сохранения импульса .....	<b>1</b>
• Уравнение: выражение для скоростей .....	<b>2</b>
• Уравнение: два случая .....	<b>1</b>
• Ответ для $m_1/m_2$ .....	<b>1+1</b>

### 11.3. Максимум света

*П. А. Тараканов*

Двойная звезда состоит из белого карлика с массой, равной  $1.0 \mathcal{M}_{\odot}$ , и звезды, покинувшей Главную последовательность, с массой  $3.0 \mathcal{M}_{\odot}$  и эффективной температурой  $T = 4.0 \cdot 10^3$  К. Известно, что орбитальный период системы равен 15 суткам, причем в ней отсутствует аккреция вещества на белый карлик со звезды-компаньона, орбиты компонент системы круговые. Оцените максимально возможную суммарную светимость такой двойной звезды, выразив ее в светимостях Солнца.

#### Решение.

Начнем с составления плана действий.

Аккреция в системе не идет, что означает, что большая по массе звезда (будем ее для определенности называть «основной») по размеру меньше своей полости Роша. Поскольку ее эффективная температура нам дана, это означает, что ее светимость определяется ее размерами, и максимальной она будет при достижении максимальных размеров — иначе говоря, нас интересует пограничный случай, когда звезда практически полностью занимает свою полость Роша. Поэтому нам надо найти большую полуось системы (это можно сделать, зная массы компонент и орбитальный период) и, зная массы компонент, найти характерные размеры полости Роша для основной компоненты. После этого мы сможем найти ее светимость и тем самым решить задачу, поскольку с имеющейся небольшой точностью исходных данных (в частности, эффективной температуры звезды) вкладом светимости белого карлика в общую светимость системы явно можно будет пренебречь.

Вычислим большую полуось системы  $a$ . Для этого воспользуемся III законом Кеплера

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)}$$

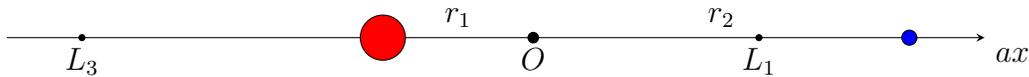
в системе единиц «астрономическая единица – масса Солнца – год» (в ней  $G = 4\pi^2$ ). Тогда

$$a = \sqrt[3]{4 \cdot \left(\frac{15}{365}\right)^2} \approx 0.19 \text{ а.е.}$$

Теперь нам надо оценить размеры полости Роша основной звезды. Хорошо известное приближение для расчета положения первой точки Лагранжа тут, по-видимому, не годится: оно получено в предположении, что массы звезд существенно отличаются, что в нашем случае неверно. Поэтому попробуем решить задачу в общем виде.

Пусть радиусы орбит компонент с массами  $\mathcal{M}_1$  (основной компаньон) и  $\mathcal{M}_2$  вокруг общего центра масс равны  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Мы знаем, что  $r_1 + r_2 = a$ , а из условия, что это расстояния от центра масс, можем записать соотношение  $\mathcal{M}_1 r_1 = \mathcal{M}_2 r_2$ . Отсюда легко получить, что  $r_1 = \frac{3}{4} a$  и  $r_2 = \frac{1}{4} a$ .

Ограничивающие полость Роша коллинеарные точки Лагранжа выделены тем, что для них суммарные ускорения, действующие на пробную частицу во вращающейся вместе с двумя основными телами системе отсчета, должны равняться нулю. Поэтому введем координату  $a \cdot x$ , задающую положение точки Лагранжа по отношению к центру масс, как на рисунке:



(тем самым величина  $x$  у нас станет безразмерной, выраженной в единицах большой полуоси) и запишем уравнение, задающее условие равенства суммарного ускорения нулю в точке  $L_1$  (с координатой  $x_1$ ):

$$-\frac{G\mathfrak{M}_1}{(r_1 + ax_1)^2} + \frac{G\mathfrak{M}_2}{(r_2 - ax_1)^2} + \omega^2 ax_1 = 0.$$

Угловая скорость вращения системы  $\omega$  однозначно определяется орбитальным периодом, поэтому ее квадрат можно выразить как

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = \frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{a^3}.$$

Подставив все, что мы уже знаем, в уравнение для суммарного ускорения, получим

$$-\frac{G \cdot 3\mathfrak{M}_2}{a^2 \left(\frac{1}{4} + x_1\right)^2} + \frac{G\mathfrak{M}_2}{a^2 \left(\frac{3}{4} - x_1\right)^2} + \frac{G \cdot 4\mathfrak{M}_2}{a^2} x_1 = 0$$

и обнаружим, что после сокращения всего, что можно, уравнение сводится к виду

$$-\frac{3}{\left(\frac{1}{4} + x_1\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3}{4} - x_1\right)^2} + 4x_1 = 0,$$

причем нас интересует его вещественный корень, удовлетворяющий условию  $0 < x_1 < 1$ .

С одной стороны, это уравнение 5-й степени и решать его аналитически проблематично. С другой — нам нужна небольшая точность, так что найти ответ можно просто перебором по 0.1, а затем сгустив сетку перебора рядом с примерно найденным значением корня. Оно окажется равным  $x_1 \approx 0.36$ .

Тем самым оценка на максимальный радиус основной звезды системы имеет вид  $R = \left(\frac{1}{4} + 0.36\right) a \approx 0.12$  а.е. Осталось вычислить ее светимость в светимостях Солнца, для чего мы воспользуемся стандартным соотношением

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 \approx 1.5 \cdot 10^2.$$

Поскольку светимости подавляющего большинства белых карликов меньше даже одной светимости Солнца, в суммарной светимости системы учитывать светимость белого карлика действительно нет никакого смысла. Крайне редко наблюдаются белые карлики с эффективными температурами до  $10^5$  К, однако малый радиус карлика приведет к тому, что даже в этом случае светимость не превысит единиц светимостей Солнца, что с имеющейся точностью исходных данных в итоговом ответе учитывать бесполезно.

<b>Критерии оценивания.</b>	<b>15</b>
<b>К1.</b> Вывод о том, что характерные размеры основной компоненты порядка полости Роша	<b>2</b>
<b>К2.</b> Вычисление большой полуоси системы через III закон Кеплера	<b>2</b>
<b>К3.</b> Вывод о том, что известная формула для положения точки $L_1$ не верна в случае сравнимых масс компонент	<b>1</b>
<b>К4.</b> Описание геометрии системы (текстом или рисунком)	<b>1</b>
<b>К5.</b> Составление уравнения для нахождения положения точки $L_1$ и его верное приближенное решение с описанием способа решения	<b>6</b>
• если используется та самая формула для положения точки $L_1$	<b>2</b>
• если учитывается только равенство гравитационных ускорений	<b>2</b>
• если расстояние до $L_1$ оценивается как расстояние до центра масс	<b>1</b>
<b>К6.</b> Вычисление светимости	<b>2</b>
• избыточная точность	<b>1</b>
• светимость не выражена в светимостях Солнца	<b>1</b>
<b>К7.</b> Вклад белого карлика в общую светимость пренебрежимо мал (или корректный подсчет светимости карлика)	<b>1</b>

## 11.4. Улетная задача

*П. А. Тараканов*

Как известно, среднее расстояние от Луны до Земли в среднем увеличивается на 4 см в год. Исходя из этого, оцените, на сколько увеличивается средняя продолжительность земных суток за один век.

### Решение.

Как мы знаем, в общем случае в замкнутой системе сохраняется полный момент импульса. Полный момент импульса системы «Земля – Луна», которую с достаточной точностью можно считать замкнутой, состоит из трех компонент: момента импульса Луны, связанного с ее обращением вокруг Земли по орбите, момента импульса, связанного с вращением Земли вокруг своей оси, и момента импульса, связанного с вращением Луны вокруг своей оси. Сразу же можно заметить, что третий компонент крайне мал — масса Луны намного меньше массы Земли, вращается вокруг своей оси она существенно медленнее, так что для оценки им можно пренебречь. Тогда изменение момента, связанного с вращением Земли вокруг своей оси, должно равняться изменению орбитального момента Луны.

Заметим, что полная механическая энергия не сохраняется: механизм приливного торможения Земли «работает» за счет того, что перемещение приливных «горбов» не может происходить без диссипации энергии из-за вязкости (трения), что приводит к тому, что часть механической энергии системы переходит в тепловую. В принципе, воспользовавшись теоремой вириала, можно показать, что ровно половина потерянной Землей кинетической энергии вращения будет потрачена на увеличение потенциальной энергии системы «Земля–Луна» (проще говоря, на удаление Луны от Земли), а вторая половина — на нагрев Земли, но такой способ решения задачи, хотя и возможен, заведомо слишком сложен.

Запишем закон сохранения момента импульса, считая, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите с радиусом  $r$  (при движении по эллиптической орбите в задаче одного притягивающего центра орбитальный момент не меняется, так что мы тем самым ничего не испортим), а Земля имеет момент инерции, равный  $I_{\oplus} = \kappa M_{\oplus} R_{\oplus}^2$  (чему равен коэффициент  $\kappa$ , обсудим чуть позже).

Полный момент импульса системы имеет вид:

$$J = \kappa M_{\oplus} R_{\oplus}^2 \omega_{\oplus} + r M_{\zeta} v_{\zeta} = \text{const},$$

тут  $\omega_{\oplus}$  — угловая скорость вращения Земли, а  $v_{\zeta}$  — орбитальная скорость Луны, которую можно вычислить как  $v_{\zeta} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r}}$ . Тогда

$$J = \kappa M_{\oplus} R_{\oplus}^2 \omega_{\oplus} + M_{\zeta} \sqrt{GM_{\oplus} r}.$$

Так как суммарный момент — константа, увеличение одного из слагаемых должно полностью компенсироваться уменьшением другого. Для удобства вычислений найдем дифференциал обеих частей равенства. Поскольку суммарный момент — константа, то  $dJ = 0$  и

$$\kappa M_{\oplus} R_{\oplus}^2 d\omega_{\oplus} + \frac{M_{\zeta}}{2} \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r}} dr = 0.$$

Это выражение связывает между собой малое изменение радиуса орбиты  $dr$  и малое изменение угловой скорости вращения Земли  $d\omega_{\oplus}$ .

Аналогичным образом выразим  $d\omega_{\oplus}$  через изменение периода вращения Земли  $T$ . Поскольку  $T \cdot \omega_{\oplus} = 2\pi$  (по окружности точка проходит именно столько радианов за период), дифференцируя, получаем  $Td\omega_{\oplus} + \omega_{\oplus}dT = 0$ , а отсюда следует, что

$$d\omega_{\oplus} = -\frac{dT}{T} \cdot \omega_{\oplus} = -\frac{2\pi dT}{T^2}.$$

Объединяя полученные результаты, запишем

$$\varkappa M_{\oplus} R_{\oplus}^2 \frac{2\pi dT}{T^2} = \frac{M_{\zeta}}{2} \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r}} dr$$

откуда

$$dT = \frac{T^2}{2\pi \varkappa M_{\oplus} R_{\oplus}^2} \cdot \frac{M_{\zeta}}{2} \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r}} dr.$$

В принципе, можно сразу подставлять сюда численные данные, но можно и немного упростить себе вычисления, преобразовав выражение к виду

$$dT = \frac{T}{\varkappa M_{\oplus} R_{\oplus} v_{\text{ЭКВ}}} \cdot \frac{M_{\zeta}}{2} \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r}} dr = \frac{T}{2\varkappa R_{\oplus}} \cdot \frac{M_{\zeta}}{M_{\oplus}} \cdot \frac{v_{\zeta}}{v_{\text{ЭКВ}}} dr,$$

где  $v_{\text{ЭКВ}}$  — линейная скорость движения точек на экваторе Земли (из-за вращения Земли вокруг своей оси), а  $v_{\zeta}$  — орбитальная скорость Луны.

Осталось определиться со значением коэффициента  $\varkappa$ . Если бы Земля была однородным шаром, то этот коэффициент равнялся бы  $\frac{2}{5}$ , но в реальности плотность Земли максимальна в ее центре и убывает к поверхности, что немного уменьшает результат. Весьма точная оценка —  $\varkappa = 0.3$ .

Теперь подставляем данные, учитывая, что нас интересует оценка (т.е. вполне хватит одной значащей цифры), орбитальная скорость Луны (примерно 1 км/с) в 2 раза больше линейной скорости точек на экваторе Земли, а отношение масс Земли и Луны равно  $8 \cdot 10^1$ . Нас интересует изменение продолжительности суток за 100 лет, поэтому  $dr = 4$  м:

$$dT = \frac{8.6 \cdot 10^4 \text{ с}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-1} \cdot 6.4 \cdot 10^6 \text{ м}} \cdot \frac{2}{8 \cdot 10^1} \cdot 4 \text{ м} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Это и есть ответ. Заметим, что он в точности совпадает с реальными данными о замедлении вращения Земли, получаемыми с помощью радиоастрономических наблюдений.

<b>Критерии оценивания.</b>	<b>15</b>
<b>К1.</b> Запись и использование закона сохранения момента импульса .....	<b>5</b>
• Использование закона сохранения энергии .....	<b>2</b>
<b>К2.</b> Момент инерции Земли .....	<b>3</b>
• однородный шар (2/5) .....	<b>2</b>
• другой коэффициент при правильной размерности .....	<b>1</b>
<b>К3.</b> Учет или обоснованный неучет эллиптичности орбиты Луны .....	<b>1</b>
<b>К4.</b> Вычисление $d\omega$ и $dT$ (при правильных предыдущих действиях) .....	<b>3</b>
<b>К5.</b> Вычисление ответа .....	<b>3</b>
• результат с заведомо завышенной точностью (3 значащих цифры или более) –1	
• правильный счет для неправильной модели, при условии получения правдоподобного ответа .....	<b>2</b>
• правильный счет для неправильной модели с неправдоподобным ответом .	<b>1</b>
• $dT < 0$ или порядка 1 секунды или более .....	<b>0</b>
Нечто феерическое (потенциальная энергия Луны $mgh$ , подсчет удаления по закону Хаббла и т.п.) — общие <b>0</b> баллов за задачу.	

## 11.5. Элементарная задача

*П. А. Тараканов*

В спектрах звезд Вольфа-Райе обычно наблюдается серия линий поглощения с лабораторными длинами волн  $4551 \text{ \AA}$ ,  $5411 \text{ \AA}$ ,  $10123 \text{ \AA}$ , возникающих при взаимодействии излучения с атомами некоторого химического элемента, находящимися в некотором конкретном состоянии. Определите элемент, являющийся источником этих линий, состояние атомов этого элемента, а также опишите состояния, в которые переходят атомы при поглощении излучения.

В спектре того же элемента в том же состоянии имеются и другие линии, длины волн которых заключены между двумя крайними длинами волн серии выше. Почему они в аналогичных условиях обычно не наблюдаются?

### Решение.

Что известно про звезды Вольфа-Райе? Это либо массивные звезды на поздних стадиях эволюции с повышенным содержанием гелия, либо самые массивные звезды Главной последовательности, в спектрах которых также заметны линии гелия. Логично предположить, что именно гелию указанная в условии задачи серия и принадлежит.

В каком состоянии он там может находиться? Эффективные температуры звезд Вольфа-Райе очень высоки, минимальная граница соответствует примерно  $3 \cdot 10^4 \text{ K}$ , и это означает, что обнаружение там неионизованного гелия (HeI) маловероятно (тут полезно вспомнить, что звезды из основной «полосы неустойчивости» на диаграмме Герцшпрунга-Рассела пульсируют в конечном счете из-за того, что температуры их фотосфер близки к характерной температуре ионизации гелия, а это заметно более холодные звезды (например, классические цефеиды — желтые гиганты). Полная ионизация (HeIII) исключена: образование линий требует наличия переходов электронов в атомах между уровнями, если все электроны оторваны от ядер, то и переходить будет нечему.

Тем самым наиболее подходящий кандидат — однократно ионизованный гелий (HeII). Убедимся, что наше предположение правильно. Вспомним, что для водородоподобных атомов (у которых на внешней орбитали находится только один электрон, интересующий нас HeII к ним относится) справедлива формула Ридберга, позволяющая вычислить длины волн, соответствующих переходам электронов с  $i$ -ого на  $k$ -ый уровень в атоме, которую в наиболее удобном для нас сейчас виде можно записать как

$$\lambda_{ik} \approx \frac{912 \text{ \AA}}{Z^2} \left| \frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right|^{-1},$$

где  $Z$  — зарядовое число ядра (в случае HeII  $Z = 2$ ).

Рассмотрим, наверное, более реалистичный для участника олимпиады случай: формула Ридберга для атома водорода известна, а вот конкретный вид зависимости от  $Z$  для случаев, отличных от  $Z = 1$ , участник не помнит. Тогда зависимость можно восстановить из следующих соображений.

Размер электронных орбиталей в атомах (в частности, размер первой боровской орбиты) и, как следствие, характерная энергия электрона на некоторой орбитали определяются

принципом неопределенности Гейзенберга, утверждающего, что неопределенность некоторой компоненты импульса электрона  $\Delta p_x$  и неопределенность соответствующей координаты  $\Delta x$  не могут быть меньше некоторого порогового значения. Вспомнив, как устроена модель Бора, заметим, что это означает, что радиус орбитали  $r$  и соответствующий ей модуль импульса  $p$  должны быть связаны соотношением  $r \cdot p = \text{const}$ . Считая, что электрон летает по круговой орбите вокруг ядра с зарядом, пропорциональным  $Z$ , получаем, что его импульс пропорционален круговой скорости, а та, в свою очередь, пропорциональна  $\sqrt{Z/r}$ . Отсюда  $r \cdot \sqrt{Z/r} = \text{const}$ , а это означает, что  $r \propto 1/Z$ . Энергия электрона на данном уровне  $E \propto Z/r \propto Z^2$ . Это означает, что энергии всех уровней в атоме с зарядом ядра  $Z$  возрастут в  $Z^2$  раз, а соответствующие переходам между уровнями длины волн, наоборот, уменьшатся в  $Z^2$  раз, что уже отражено в выписанной выше формуле.

Осталось подобрать конкретные переходы. Для этого сначала вычислим (можно очень грубо) длины волн, соответствующие ионизации HeII с некоторого уровня:

$$\lambda_{i\infty} \approx 228 \text{ \AA} \cdot i^2.$$

Важно заметить, что длина волны, соответствующая ионизации с уровня  $i$ , должна быть меньше всех длин линий, соответствующих переходам с уровня  $i$  на более высокие уровни  $k$ , поэтому надо найти максимальное  $i$ , для которого  $\lambda_{i\infty}$  будет меньше всех известных нам длин волн серии. Решение соответствующих неравенств (или просто обычный перебор) показывают, что  $i = 4$ . Остается лишь убедиться (что проще всего также сделать перебором), что три данные в условии длины волн с хорошей точностью соответствуют  $k \in \{5, 7, 9\}$  (в обратном порядке). Таким образом, серия соответствует однократно ионизованному гелию, который поглощает фотоны, в результате чего оставшийся у него единственный электрон переходит с 4-го на 5-й, 7-й или 9-й уровни.

Осталось дать ответ на последний вопрос задачи. Очевидно, что речь идет о переходах на 6-й и 8-й уровень, именно они «пропущены». Но если представить эти номера как  $k = 2n$  и подставить их в формулу Ридберга для  $i = 4$  (и  $Z = 2$ )

$$\lambda_{4k} \approx \frac{912 \text{ \AA}}{4} \left| \frac{1}{(2 \cdot 2)^2} - \frac{1}{(2 \cdot n)^2} \right|^{-1} = 912 \text{ \AA} \left| \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right|^{-1},$$

то можно заметить, что у нас получатся длины волн, соответствующие линиям бальмеровской серии водорода  $H_\alpha$  и  $H_\beta$ . Таким образом, эти две линии попросту блендируются линиями водорода, что делает их наблюдение и отождествление куда более проблематичным, чем у их «соседей» по серии.

Напоследок заметим, что эта серия линий обычно носит название серии Пикеринга или Пикеринга-Фаулера, которые предполагали, что они являются водородными, но с «полуцелыми» номерами уровней. То, что это линии гелия, было показано Бором, и стало существенным аргументом в поддержку модели атома Бора.

**Критерии оценивания.****15**

Здесь в подпунктах перечислены подкритерии, из которых складывается итоговая оценка по критерию.

<b>К1.</b> Вывод о том, что линии принадлежат HeII .....	<b>4</b>
• понимание, что в звездах WR должны быть линии He .....	<b>2</b>
• вывод, что это не HeI и HeIII .....	<b>1</b>
• запись окончательного вывода .....	<b>1</b>
<b>К2.</b> Указание на то, что можно использовать формулу Ридберга и её запись .....	<b>6</b>
• водородоподобный атом $\Rightarrow$ формула Ридберга .....	<b>1</b>
• зависимость $\lambda$ от номеров уровней .....	<b>1</b>
• зависимость от $Z$ (вывод/запись известного результата) .....	<b>4</b>
– $Z^0$ .....	<b>0</b>
– $Z^{-1}$ .....	<b>2</b>
– $Z^n, n \neq \{-2, -1, 0\}$ .....	<b>1</b>
– $Z^{-2}$ .....	<b>4</b>
<b>К3.</b> Подбор нужных уровней .....	<b>2</b>
<b>К4.</b> Ответ на последний вопрос .....	<b>3</b>

## 11.6. Яффе в профиль

*А.В.Веселова*

В модели Яффе, описывающей сферически-симметричное распределение материи в галактике, масса, заключенная в пределах расстояния  $r$  от центра симметрии системы, зависит от этого расстояния как

$$M(r) = 4\pi\rho_0 a^3 \cdot \frac{\frac{r}{a}}{1 + \frac{r}{a}}.$$

Здесь  $\rho_0$  — некоторая характерная плотность,  $a$  — масштабный параметр системы.

- Получите формулу зависимости плотности материи в галактике от расстояния до центра симметрии системы  $\rho(r)$ .
- Получите зависимость скорости на круговой орбите от расстояния  $V_c(r)$ . Как выглядит зависимость при  $r \rightarrow +\infty$  и при  $r \rightarrow 0$ ?
- Представим, что в поле тяготения такой галактики в одной плоскости и в одном направлении по круговым орбитам движутся две звезды. Радиус орбиты первой равен  $2a$ , радиус орбиты второй —  $a$ . Чему равна максимальная наблюдаемая лучевая скорость второй звезды при наблюдении с первой?

### Решение.

- По условию внутри сферы с радиусом  $r$  заключена масса  $M(r)$ . Рассмотрим дополнительный слой толщиной  $dr$ . Его масса, с одной стороны, равна разности  $dM = M(r + dr) - M(r)$ , с другой стороны, она равна объему слоя, умноженному на характерную плотность:  $4\pi r^2 dr \cdot \rho(r)$ . Получаем равенство

$$dM = 4\pi r^2 dr \cdot \rho(r), \quad \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r),$$

$$4\pi\rho_0 a^3 \cdot \frac{\frac{1}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right) - \frac{r}{a^2}}{\left(1 + \frac{r}{a}\right)^2} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad \rho(r) = \frac{\rho_0 a^2}{r^2 \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2} = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2}.$$

Такое распределение плотности действительно соответствует модели Яффе и представляет собой частный случай распределения вида

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha \left(1 + \frac{r}{a}\right)^{\beta-\alpha}}, \quad \alpha = 2, \beta = 4.$$

- Распределение плотности сферически-симметричное. В таком случае орбиты свободно движущихся тел являются плоскими, что придает осмысленность рассмотрению круговых орбит. Далее, в сферически-симметричном распределении материи выполняется теорема Ньютона: если материальная точка находится на расстоянии  $r$  от центра системы, то она движется в поле тяготения массы, расположенной в сфере радиуса  $r$ ; действие внешних слоев скомпенсировано. Тогда зависимость круговой скорости от расстояния задается соотношением

$$V_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{1 + \frac{r}{a}}}.$$

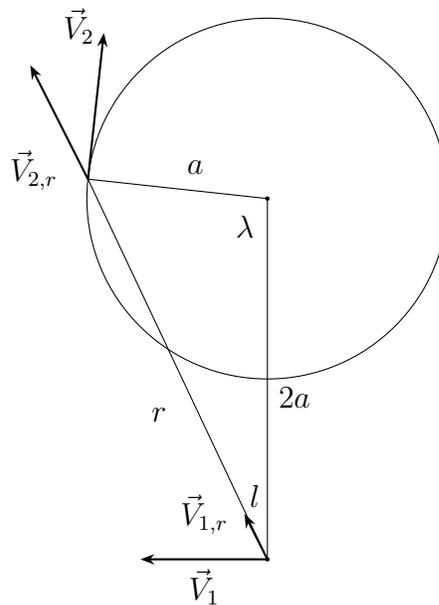
При  $r \rightarrow 0$  второе слагаемое в знаменателе становится малым,

$$V_c(r) \approx \sqrt{4\pi G \rho_0 a^2} \cdot \left(1 - \frac{r}{2a}\right)$$

и величина скорости стремится к константе  $V_c(0) = \sqrt{4\pi G \rho_0 a^2}$ .

При  $r \rightarrow +\infty$  в знаменателе можно пренебречь 1 по сравнению со вторым слагаемым, тогда  $V_c(r) \rightarrow \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0 a^3}{r}}$ . Практически спадание происходит по кеплерову закону, поскольку полная масса при  $r \rightarrow +\infty$  остается конечной.

- С. Нарисуем схему движения звезд в плоскости их орбит. Наблюдаемая лучевая скорость равна разности лучевых скоростей наблюдаемой звезды и наблюдателя. Пусть  $l$  — угол для наблюдателя между направлением на наблюдаемый объект и на центр галактики,  $\lambda$  — угол с вершиной в центре галактики между направлениями на звезды.



Лучевая компонента скорости наблюдателя составляет  $V_{1,r} = V_1 \sin l$ , лучевая компонента скорости второй звезды равна  $V_{2,r} = V_2 \cos(l + \lambda - 90^\circ) = V_2 \sin(l + \lambda)$ . Теорема синусов для образованного звездами и центром системы треугольника приводит к равенству

$$\frac{\sin(180^\circ - \lambda - l)}{2a} = \frac{\sin l}{a} \Rightarrow \sin(l + \lambda) = 2 \sin l.$$

В итоге наблюдаемая лучевая скорость составит

$$V_r = V_{2,r} - V_{1,r} = (2V_2 - V_1) \sin l.$$

Значения орбитальных скоростей зависят только от радиуса орбит. Следовательно, максимальное значение наблюдаемой скорости будет соответствовать максимальному значению  $\sin l$ , то есть касательному направлению луча зрения к орбите второй звезды.

При этом  $\sin l = \frac{a}{2a} = 0.5$ .

Запишем выражения для круговой скорости на указанных радиусах орбит:

$$V_2 = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{1 + \frac{a}{a}}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{2}}; \quad V_1 = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{1 + \frac{2a}{a}}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{3}}.$$

Итоговое выражение для наблюдаемой лучевой скорости:

$$V_{r,\max} = V_2 - 0.5V_1 = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{2}} - 0.5 \cdot \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{3}} = \sqrt{4\pi G\rho_0 a^2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right).$$

### Критерии оценивания.

15

- К1.** Определение зависимости плотности от расстояния ..... 5
- верная обоснованная связь между  $\Delta M$ ,  $\Delta V$ ,  $\rho$  ..... 3
  - дифференцирование или использование малости приращения ..... 1
  - обоснованное получение итоговой верной формулы для плотности ..... 1
- Зависимость средней плотности от расстояния: за пункт выставляется не более 2 баллов.
- К2.** Скорости на круговой орбите ..... 4
- верная запись формулы для круговой скорости ..... 1
  - верная асимптотика при  $r \rightarrow 0$  ..... 1
  - верная асимптотика при  $r \rightarrow +\infty$  ..... 2
  - предел 0 без указания на спад  $\sim 1/\sqrt{r}$  ..... 1
- К3.** Определение максимальной лучевой скорости ..... 6
- верные формулы круговых скоростей для обеих орбит ..... 1
  - верные обоснованные формулы для проекций скоростей ..... 1+1
  - обоснованное определение элонгации при  $V_{r,\max}$  ..... 2
  - получение и упрощение верного выражения для  $V_{r,\max}$  ..... 1
- Неучет скорости наблюдателя: не более 2 баллов.