Теоретический тур

Условия, решения и схема оценивания. 10 класс

Содержание

10.1. Восточный экспресс

В.Б. Игнатьев

Корпорация «Роскосмос» запускает ракету-носитель со спутником с космодрома Восточный ($\lambda = 128°20'$ в. д., $\varphi = 51°53'$ с. ш.). На первом этапе ракета-носитель выводит спутник на опорную круговую орбиту высотой 270 км, для которой космодром Восточный является самой северной точкой орбиты.

Через несколько оборотов при пересечении плоскости экватора Земли спутник переходит на промежуточную эллиптическую орбиту того же наклонения, апоцентрическое расстояние которой равно радиусу орбиты геостационарных спутников. На этой орбите спутник может совершить несколько оборотов. Оказавшись в апоцентре промежуточной орбиты, спутник еще одним маневром переходит на геостационарную орбиту. Считайте, что все маневры, включая вывод на опорную орбиту, совершаются мгновенно.

Определите оптимальное число витков спутника на опорной и на промежуточной орбитах, необходимое для вывода спутника на геостационарную орбиту с долготой Уфы ($\lambda = 56°$ в. д.) с точностью не хуже 3 градусов. При этом суммарная продолжительность перехода не должна превышать 48 часов от момента запуска.

Решение.

Будем решать задачу в системе отсчета центра Земли.

Этап 1. Определение времен всех маневров.

Определим период обращения спутника на опорной круговой орбите.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a_1^3}{GM_\odot}} = 5372 \text{ секунд}$$

Теперь рассмотрим промежуточную эллиптическую орбиту. Определим афелийное расстояние на этой орбите:

$$a_G = \sqrt[3]{\frac{GM_\odot T_\odot^2}{2\pi}} = 42.23 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Отметим, что в качестве периода обращения Земли для расчетов геоцентрической орбиты нужно подставлять звездные сутки, не 24 часа, а $23^h56^m04^s = 86164^s$.

Большая полуось эллиптической орбиты находится как

$$a_2 = \frac{a_1 + a_G}{2}$$

Период обращения аппарата на этой орбите составляет

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a_2^3}{GM_\odot}} = 2\pi\sqrt{\frac{(a_1 + a_G)^3}{8GM_\odot}} \approx 37\,925^s$$

Этап 2. Расчеты долгот. За некоторое время Δt Земля повернется на угол

$$\alpha = \frac{\Delta t}{86164} \cdot 360^\circ$$

Но при этом спутник сделает нецелое число витков вокруг центра Земли.

Переход между опорной и промежуточной орбитами осуществляется в точке в экваториальной плоскости Земли, а начальная точка по условию является самой северной точкой орбиты. Поэтому на опорной орбите спутник может сделать целое число витков n ($n = 0, 1, 2...$) и либо $\frac{1}{4}$, либо $\frac{3}{4}$ оборота. За один оборот спутника на этой орбите Земля провернется под ним на угол 22.4°.

На промежуточной эллиптической орбите период спутника равен $T_2 = 37\,925$ секунд, что соответствует повороту Земли на 158.5°. Для выхода на геостационарную орбиту спутнику на промежуточной орбите необходимо сделать полуцелое число оборотов $k + \frac{1}{2}$. Где $k = 0, 1, 2....$

Этап 3. Последовательность маневров.

Выработаем последовательность маневров для вывода спутника на долготу Уфы. Для решения этой задачи расчеты разумнее производить через углы поворота, а не через время. Но в конце решения надо будет проверить, чтобы итоговое время оказалось менее 48 часов.

Рассмотрим случай, когда на первой орбите спутник сделает $n + \frac{1}{4}$ витков.

Тогда после всех маневров спутник сделает

$$N = n + \frac{1}{4} + k + \frac{1}{2} \text{ витков,}$$

и спутник окажется на долготе λ при старте с долготы λ_0:

$$\lambda = \lambda_0 - 90^\circ - (n + \frac{1}{4}) \cdot 22.4^\circ - (k + \frac{1}{2}) \cdot 158.5^\circ$$

Упростим выражение, оставив только целочисленные переменные n и k:

$$\lambda = \lambda_0 - 90^\circ - 84.85^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

Подставим значения λ и λ_0:

$$56^\circ = 128.3^\circ - 90^\circ - 84.85^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

Упростим:

$$-102.5^\circ + 360^\circ \cdot M = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k, \tag{1}$$

здесь M – целое число оборотов Земли.

В случае, если мы рассматриваем на первой орбите $n + \frac{3}{4}$ оборота перед переходом на вторую эллиптичную орбиту, то выражение будет иметь вид

$$\lambda = \lambda_0 + 90^\circ - (n + \frac{3}{4}) \cdot 22.4^\circ - (k + \frac{1}{2}) \cdot 158.5^\circ$$

$$56° = 128.3° + 90° - 98.3° - 22.4° \cdot n - 158.5° \cdot k$$

$$66.25° + 360° \cdot M = 22.4° \cdot n + 158.5° \cdot k \qquad (2)$$

Теперь надо подобрать целые числа n и k, при которых равенство выполняется.

Составим таблицу угла смещения для различных n и k:

$$f(\lambda) = 22.4° \cdot n + 158.5° \cdot k$$

и сравним полученные значение с искомыми.

$$\begin{cases} 257.45° = 22.4° \cdot n + 158.5° \cdot k \quad \text{или} \\ 66.25° = 22.4° \cdot n + 158.5° \cdot k \end{cases}$$

	0	1	2	3
1	22.4	180.9	339.4	497.9
2	44.8	203.3	361.8	520.3
3	67.2	225.7	384.2	542.7
4	89.6	248.1	406.6	565.1
5	112	270.5	429	587.5
6	134.4	292.9	451.4	609.9
7	156.8	315.3	473.8	632.3
8	179.2	337.7	496.2	654.7
9	201.6	360.1	518.6	677.1
10	224	382.5	541	699.5
11	246.4	404.9	563.4	721.9
12	268.8	427.3	585.8	744.3
13	291.2	449.7	608.2	766.7
14	313.6	472.1	630.6	789.1
15	336	494.5	653	811.5
16	358.4	516.9	675.4	833.9

По вертикальной оси n – целое число витков на первой орбите, по горизонтальной оси k – целое число витков на второй орбите. Для стратегии с $n + \frac{1}{4}$ нас интересуют значения угла поворота $257.45°$ или $257.45° + 360°$, а для стратегии $n + \frac{3}{4}$ – значение $66.25°$.

Из таблицы видим, что первый сценарий реализовать не получится, а второй реализуется при $n = 3$ и $k = 0$. Проверим, сколько времени потребуется для реализации всех маневров.

$$\Delta T = (n + \frac{3}{4}) \cdot T_1 + (k + \frac{1}{2}) \cdot T_2$$

$$\Delta T = (3 + \frac{3}{4}) \cdot 5370^s + \frac{1}{2} \cdot 37925^s = 39\,100^s \approx 10.9 \text{ часа.}$$

Альтернативные решения.

Найденная пара $n = 3,\ k = 0$ является оптимальной по времени перехода, однако не единственной. Если продолжить таблицу значений $f(\lambda)$ из стратегии $n + \frac{3}{4}$ на большие значения n (т.е. рассматривать варианты, в которых правая часть равенства (2) обходит лишние 360° за счёт дополнительных оборотов Земли), обнаруживаются ещё два попадания в окрестность Уфы — $n = 19,\ k = 0$ и $n = 12,\ k = 1$. В обоих случаях суммарное время составляет около 34.9 часа, то есть формальным условиям варианты удовлетворяют.

Кроме того, условие задачи фиксирует наклонение опорной орбиты ($i = 51.88°$, поскольку космодром Восточный — самая северная её точка), но не задаёт направление обращения спутника. При запуске «против вращения Земли» (по ретроградной орбите) положения восходящего и нисходящего узлов в инерциальной системе меняются местами, и формулы (1) и (2) переходят друг в друга с заменой знака. Перебор показывает, что в коридоре $\pm 3°$ от Уфы и в пределах 48 часов реализуются ещё три ретроградных решения – $n = 11,\ k = 0$, $n = 4,\ k = 1$ (около 22.9 часа), а также $n = 27,\ k = 0$ (около 46.9 часа).

Сводная таблица всех найденных в рамках условий задачи решений приведена ниже. Оптимальным остаётся прямой запуск $n = 3,\ k = 0$ – наименьшее время и наиболее реалистичный по энергозатратам вариант.

№	Запуск	n	k	ΔT, ч	Ошибка от Уфы
1	прямой	3	0	10.9	$-1.5°$
2	ретроградный	11	0	22.9	$-1.8°$
3	ретроградный	4	1	22.9	$-2.5°$
4	прямой	19	0	34.9	$-2.1°$
5	прямой	12	1	34.9	$-2.8°$
6	ретроградный	27	0	46.9	$-2.4°$

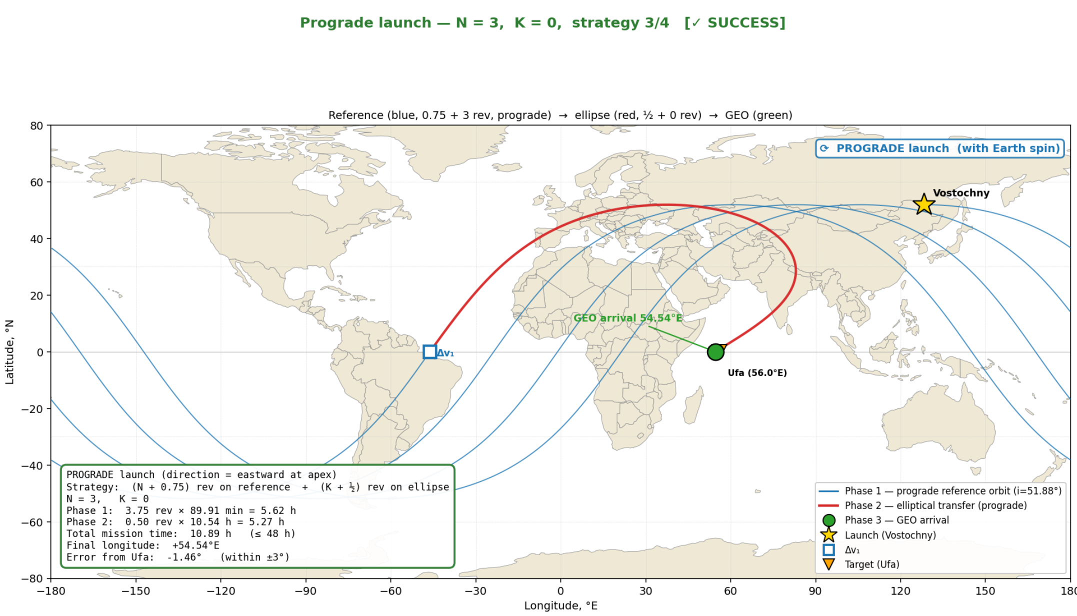


Рис. 1: Решение №1. Прямой запуск, $n = 3,\ k = 0$. Оптимальное по времени решение задачи: $\Delta T \approx 10.9$ ч, конечная долгота 54.5° в. д.

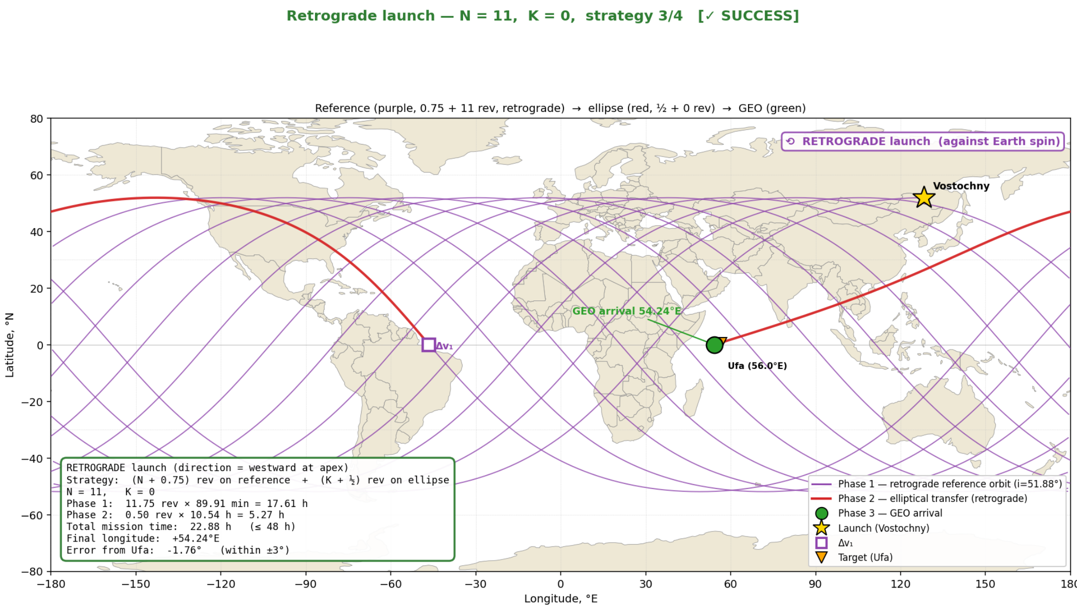


Рис. 2: Решение №2. Ретроградный запуск, $n = 11$, $k = 0$. $\Delta T \approx 22.9$ ч, конечная долгота 54.2° в. д.

Критерии оценивания. **15**

К1. Определение времени всех маневров ... **3**

Период обращения спутника на опорной орбите ... 1

Афелийное расстояние на опорной орбите ... 1

Период обращения спутника на эллиптической орбите ... 1

В случае, если участник в качестве периода Земли берет 86400 секунд, оценка по данном критерию снижается на 1 балл

К2. Определение угла поворота Земли ... **3**

Формула, связывающая угол поворота Земли со временем ... 1

В случае, если участник в качестве периода Земли берет 86400 секунд, оценка по данному подкритерию 0 баллов

Значение угла поворота Земли за один оборот на опорной орбите (22.4°) ... 1

Значение угла поворота Земли за один оборот на эллиптичной орбите (158.5°) ... 1

К3. Определение оптимального числа витков ... **9**

Утверждение, что на опорной орбите нужно сделать $n + \frac{1}{4}$ или $n + \frac{3}{4}$ оборота ... 1+1

Получена формула (1) или ей аналогичная для случая $n + \frac{1}{4}$ ... 2

Получена верный ответ для случая $n + \frac{1}{4}$. (Решения нет) ... 2

Получена формула (2) или ей аналогичная для случая $n + \frac{3}{4}$ ... 2

Получена верные ответы n и k. для случая $n + \frac{3}{4}$ ... 1+1

Проверено, что суммарное время маневров меньше 48 часов ... 1

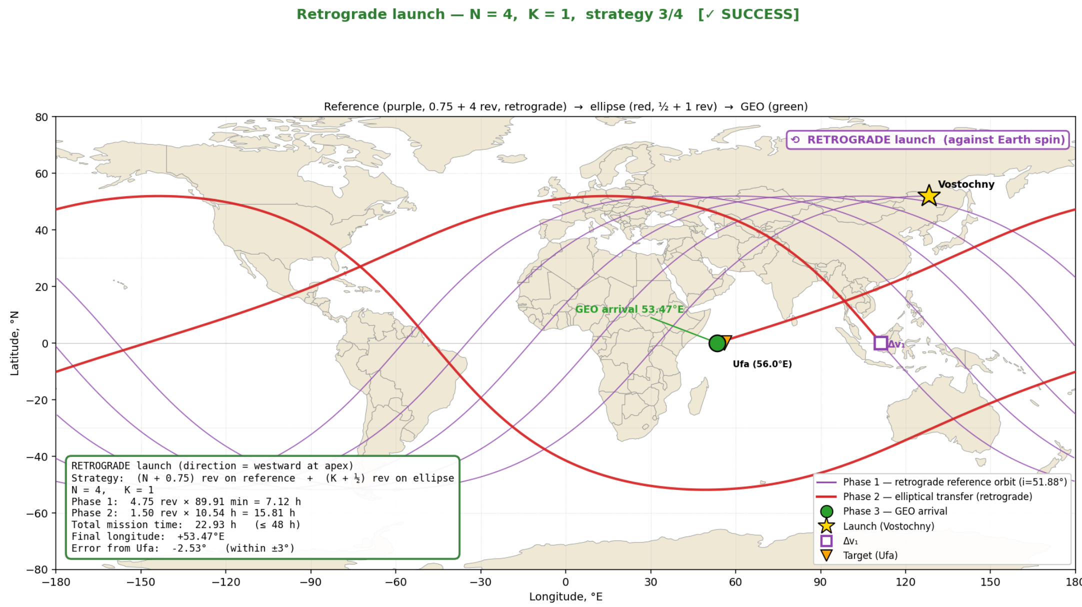


Рис. 3: Решение №3. Ретроградный запуск, $n = 4,\ k = 1$. $\Delta T \approx 22.9$ ч, конечная долгота $53.5°$ в. д.

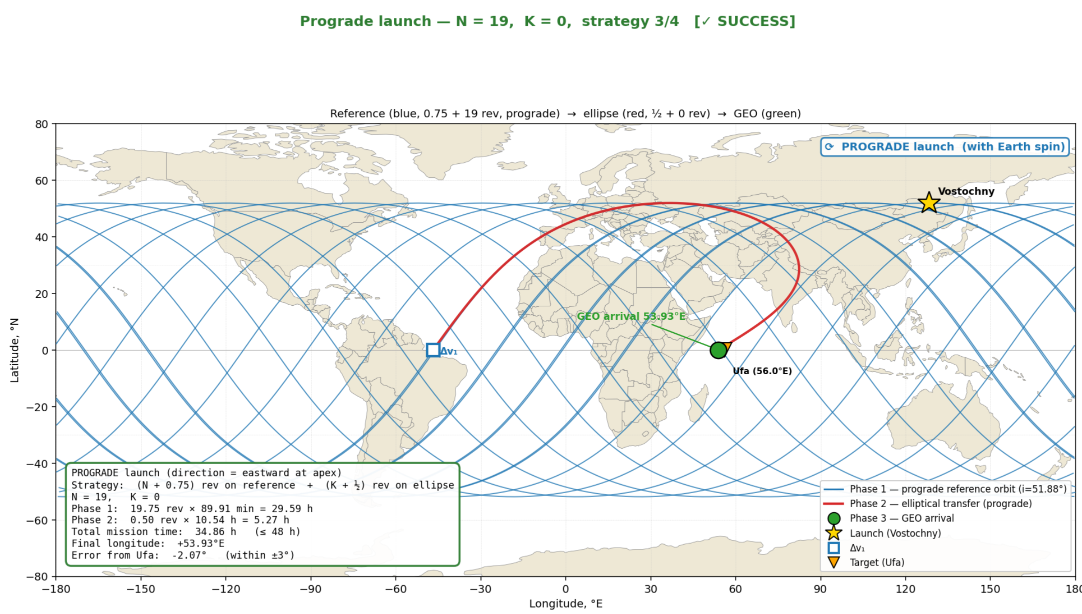


Рис. 4: Решение №4. Прямой запуск, $n = 19,\ k = 0$. $\Delta T \approx 34.9$ ч, конечная долгота $53.9°$ в. д.

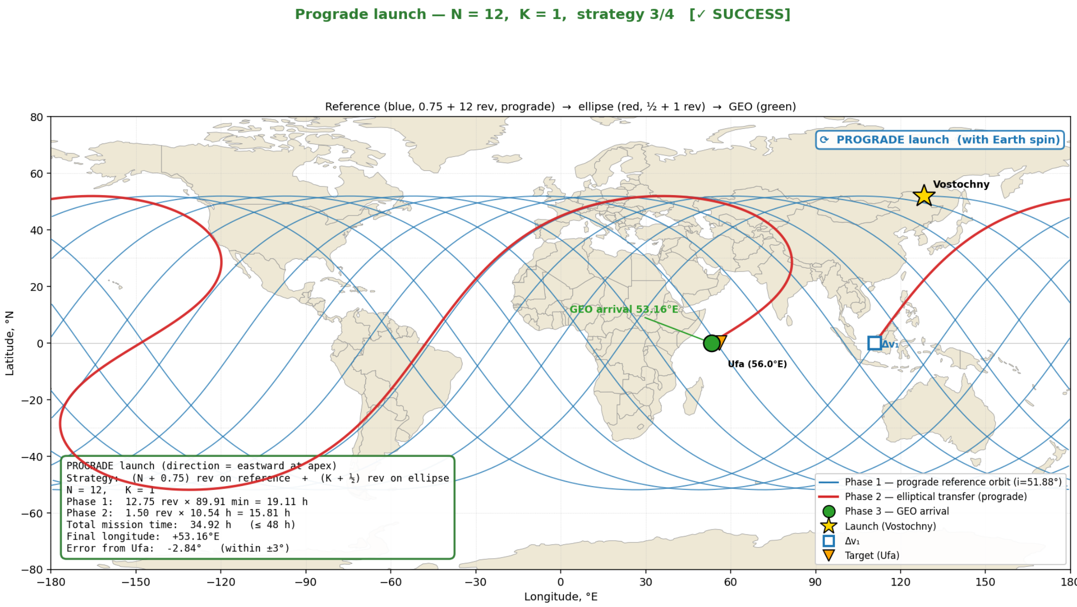


Рис. 5: Решение №5. Прямой запуск, $n = 12,\ k = 1$. $\Delta T \approx 34.9$ ч, конечная долгота 53.2° в. д.

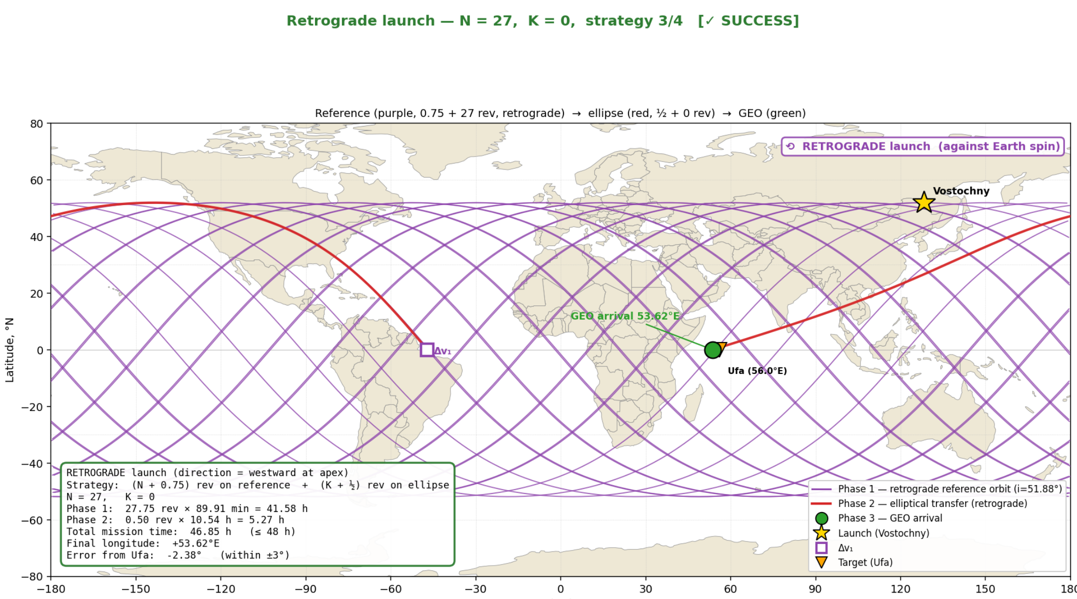


Рис. 6: Решение №6. Ретроградный запуск, $n = 27,\ k = 0$. $\Delta T \approx 46.9$ ч, конечная долгота 53.6° в. д.

10.2. Искусственный отбор

А. Н. Акиньщиков

Транзитный обзор даёт каталог планет с заметным избытком коротких периодов. Нужно оценить, какую часть этого эффекта создаёт геометрическая селекция самого метода.

Пусть все рассматриваемые планеты движутся по круговым орбитам вокруг солнцеподобных звёзд массы 1 $M_\odot$ и радиуса 1 $R_\odot$. Радиусы планет гораздо меньше радиусов звёзд, плоскости планетарных орбит ориентированы в пространстве случайно. Считайте, что наблюдатель обязательно обнаружит транзит, если он геометрически возможен.

В некотором транзитном каталоге распределение числа планет по периодам обращения оказалось таким:

Период, дни	1–2	2–4	4–8	8–16	16–32	32–64
Число планет	145	110	82	60	40	22

Для оценки считайте, что всем планетам внутри каждого диапазона периодов можно приписать период, равный среднему геометрическому границ диапазона.

A. Найдите, как вероятность наблюдения транзита зависит от периода системы P.

B. Восстановите истинную популяцию – оцените число планет в каждом диапазоне периодов и полное число планет в этом каталоге, если бы наблюдения не ограничивались эффектом геометрической селекции.

C. Сравните средний период планет в наблюдаемом каталоге и в восстановленной истинной популяции.

Решение. Обозначим через a радиус круговой орбиты, а через i – угол между нормалью к плоскости орбиты и лучом зрения. Тогда $i = 0^\circ$ соответствует орбите, видимой плашмя, а $i = 90^\circ$ – орбите, видимой с ребра. Достаточно рассматривать

$$0 \le i \le \frac{\pi}{2},$$

поскольку две противоположные нормали задают одну и ту же плоскость орбиты.

В момент соединения расстояние от центра планеты до центра диска звезды в проекции на небо равно

$$b = a \cos i.$$

Транзит возможен, если это расстояние не превосходит радиуса звезды:

$$a \cos i \le R_\odot.$$

Значит, транзитные ориентации удовлетворяют условию

$$i \ge i_0, \qquad \cos i_0 = \frac{R_\odot}{a}.$$

Теперь найдём долю систем с такими ориентациями орбит. При случайной ориентации плоскости орбиты направление её нормали равномерно распределено по сфере. На единичной сфере условия

$$i_0 \le i \le \frac{\pi}{2}$$

задают сферический пояс. Его высота равна

$$\cos i_0 - \cos\frac{\pi}{2} = \cos i_0.$$

Площадь сферического пояса на единичной сфере равна произведению 2π на его высоту. Вся полусфера возможных различных плоскостей имеет площадь 2π, поэтому доля подходящих ориентаций равна

$$p_{\rm tr} = \frac{2\pi\cos i_0}{2\pi} = \cos i_0 = \frac{R_\odot}{a}.$$

Эквивалентная интегральная запись этого шага:

$$p_{\rm tr} = \frac{\displaystyle\int_{i_0}^{\pi/2}\sin i\,di}{\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sin i\,di} = \frac{R_\odot}{a}.$$

Из третьего закона Кеплера для солнцеподобной звезды

$$a = \left(\frac{P}{1\,yr}\right)^{2/3} AU.$$

Следовательно,

$$p_{\rm tr} = \frac{R_\odot}{AU}\left(\frac{P}{1\,yr}\right)^{-2/3} \approx 0{,}00465\left(\frac{P}{1\,yr}\right)^{-2/3}.$$

Отсюда сразу видна и зависимость

$$p_{\rm tr} \propto P^{-2/3},$$

и численная нормировка, необходимая для восстановления истинного числа планет.

В каждом диапазоне берём характерный период, равный среднему геометрическому его границ:

$$P_i = \sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 8\sqrt{2},\ 16\sqrt{2},\ 32\sqrt{2}\,\text{d}.$$

Для этих периодов получаем примерно следующие геометрические вероятности транзита:

$$0{,}189,\ 0{,}119,\ 0{,}0748,\ 0{,}0472,\ 0{,}0297,\ 0{,}0187.$$

Если в некотором диапазоне наблюдается $N_{\rm obs}$ планет, то соответствующее истинное их число оценивается как

$$N_{\rm true} \approx \frac{N_{\rm obs}}{p_{\rm tr}}.$$

Отсюда в распределении по диапазонам получаем примерные значения:

$$769,\ 926,\ 1096,\ 1273,\ 1347,\ 1176.$$

Суммируя, находим оценку общего числа планет в диапазоне периодов от 1 до 64 суток:

$$N_{\rm true,tot} \approx 6590.$$

При этом в наблюдаемом каталоге было всего

$$N_{\text{obs,tot}} = 145 + 110 + 82 + 60 + 40 + 22 = 459$$

планет.

Теперь найдём средний период. Для наблюдаемого каталога используем те же характерные периоды P_i:

$$\langle P \rangle_{\text{obs}} \approx \frac{\sum N_{\text{obs},i} P_i}{\sum N_{\text{obs},i}}.$$

Подстановка чисел даёт

$$\langle P \rangle_{\text{obs}} \approx 7{,}8\,\text{d}.$$

Для истинной популяции периоды нужно усреднять с весами, равными восстановленным числам планет:

$$\langle P \rangle_{\text{true}} \approx \frac{\sum N_{\text{true},i} P_i}{\sum N_{\text{true},i}} \approx 16{,}4\,\text{d}.$$

Плоский случай

Дополнительно рассмотрим плоский случай, который использовало большинство участников: плоскость орбиты проворачивается относительно картинной плоскости только в одном направлении. При таком ограничении ориентации орбиты транзит возможен тогда, когда луч зрения проходит от плоскости орбиты не дальше, чем на расстояние порядка $R_\odot$. Поэтому геометрическая вероятность транзита пропорциональна

$$p_{\text{tr}} \propto \frac{2}{\pi}\frac{R_\odot}{a},$$

где a – радиус орбиты. Из третьего закона Кеплера для солнцеподобной звезды следует:

$$P^2 \propto a^3, \qquad a \propto P^{2/3}.$$

Следовательно,

$$p_{\text{tr}} = \frac{2}{\pi}\frac{R_\odot}{AU}\left(\frac{P}{1\,yr}\right)^{-2/3} \approx 0{,}0093\frac{1}{\pi}\left(\frac{P}{1\,yr}\right)^{-2/3}.$$

В этом случае получаем следующие геометрические вероятности транзита:

$$0{,}120,\ 0{,}075,\ 0{,}0476,\ 0{,}03,\ 0{,}0189,\ 0{,}0119.$$

Отсюда при распределении по диапазонам получаем количество планет в истинной популяции:

$$1207,\ 1454,\ 1721,\ 2000,\ 2116,\ 1847.$$

Суммируя, находим оценку общего числа планет в диапазоне периодов от 1 до 64 суток:

$$N_{\text{true,tot}} \approx 10345.$$

Остальные значения не меняются.

Критерии оценивания. **15**

К1. Выведение (определение) формулы для вероятности **4**

Если использовано плоское приближение, выставляется 2 балла, но остальное решение оценивается полностью

Если формула дается без вывода, то выставляется 0 баллов за критерий, остальное решение оценивается полностью

К2. Формула зависимости вероятности наблюдения транзита от периода системы **2**

Для плоского приближения выставляется 1 балл

К3. Вычисление верных периодов планет для каждого диапазона **2**

Каждое ошибочное вычисление – минус 1 балл за критерий, но суммарно за критерий не меньше 0 баллов

К4. Определение количества планет для каждого диапазона **2**

Каждое ошибочное вычисление – минус 1 балл за критерий, но суммарно за критерий не меньше 0 баллов

К5. Определение полного количества планет в истинной популяции **1**

Выставляется только при полностью верном решении

К6. Формула для нахождения среднего периода для выборки планет **1**

К7. Численное нахождение среднего периода для планет каталога **2**

Если периоды в диапазоне вычислялись по формуле среднего арифметического, то 1 балл

К8. Численное нахождение среднего периода для планет истинной популяции **1**

Для варианта плоского приближения: Вероятность умножается на $\frac{2}{\pi}$ (в итоговой формуле тоже). Результат меняется только в значении вероятностей и в количестве планет. Вероятности: $0.120; 0.075; 0.0476; 0.03; 0.0189; 0.0119$. Количество планет: $1207, 1454, 1721, 2000, 2116, 1847$. Общее количество планет в истинной популяции: 10345.

Для варианта среднего арифметического за критерии К3 и К7 ставится 0 баллов и 1 балл соответственно. Остальное решение оценивается в полной мере.

10.3. Галактические петли

И.В. Игнатьев

При наблюдениях за облаком HI в диске галактики (в области, где скорость вращения не зависит от расстояния от центра) было обнаружено красное смещение линии нейтрального водорода в ее спектре на 42 микрона относительно гелиоцентрической системы отсчёта. Исходя из этого, оцените возможные галактические долготы этого облака. Считайте, что скорость вращения в галактике постоянна на расстояниях от центра, больших $R_0 = 4$ кпк, а радиус галактического диска составляет $R = 15$ кпк. Толщиной диска Галактики и отклонением от круговых орбит пренебречь.

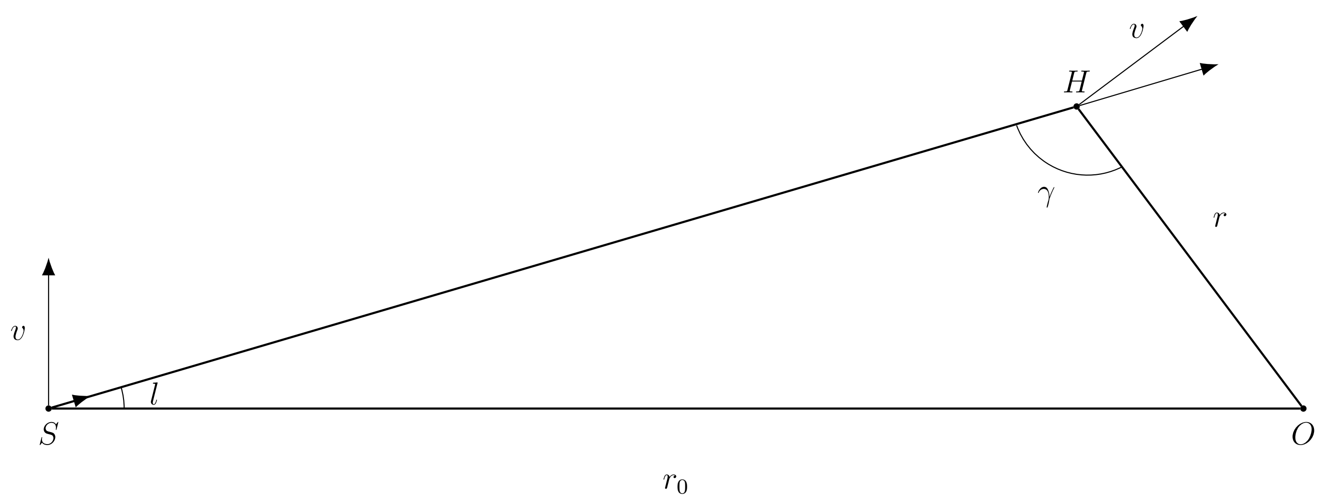
Решение.

Как известно, нейтральный водород излучает на линии $\lambda_0 = 21$ см. Исходя из этого, мы можем получить гелиоцентрическую лучевую скорость облака:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0},$$

$$v_r = 60 \text{ км/с}.$$

Отдельно отметим, что наблюдается красное смещение, а значит, облако удаляется от наблюдателя. Галактическая долгота l отсчитывается от направления от Солнца S на центр Галактики O против часовой стрелки (если смотреть с северного полюса Галактики). Обозначим облако на рисунке буквой H и определим его лучевую скорость. Поскольку и Солнце, и облако находятся дальше 4 кпк от центра Галактики, примем их скорости одинаковыми и равными скорости на плато зависимости скорости от расстояния – v, расстояние от Солнца до центра Галактики обозначим за r_0, от облака до центра Галактики за r. Вращение Галактики при этом происходит по часовой стрелке (опять же при наблюдении из северного полюса).



Тогда гелиоцентрическая лучевая скорость может быть выражена так:

$$v_r = v \sin\gamma - v \sin l.$$

Выражая из теоремы синусов для треугольник SOH синус угла γ получаем:

$$\sin\gamma = \sin l \frac{r_0}{r},$$

$$v_r = v \sin l \left(\frac{r_0}{r} - 1\right).$$

Сразу обозначим $k = v_r \ / \ v$. В результате получаем связь между l и r для фиксированного k:

$$k = \sin l \left(\frac{r_0}{r} - 1\right).$$

В качестве оценки возьмём расстояние от Солнца до центра Галактики $r_0 = 8.3$ кпк, а скорость на плато $v = 230$ км/с. В данной задаче получаем:

$$k = \frac{v_r}{v} = 0.26.$$

Перейдём к нахождению возможных галактических долгот. Рассмотрим отдельно два случая: когда облако нейтрального водорода находится к центру Галактики ближе, чем Солнце и дальше, чем Солнце.

Первый случай. Рассмотрим вариант, когда $r \leq r_0$, то есть облако не дальше от центра Галактики, чем Солнце. В таком случае для фиксированного r существует максимально возможная галактическая долгота (аналог максимальной элонганции). Отдельно отметим, что, так как k положительное, $\sin l$ также должен быть положительным, а, значит, $l < 180°$. Выражая $\sin l$, получим:

$$\sin l = \frac{k}{\frac{r_0}{r} - 1}.$$

При этом есть ограничение на $\sin l$:

$$\sin l \leq \frac{r}{r_0}.$$

В результате получаем:

$$\frac{k}{\frac{r_0}{r} - 1} \leq \frac{r}{r_0} \Rightarrow k \leq 1 - \frac{r}{r_0},$$

$$r \leq (1 - k) r_0.$$

Также из условия наблюдаемое облако нейтрального водорода уже находится на плато скоростей, а значит:

$$r \geq R_0$$

Видим, что галактическая долгота монотонно растёт с ростом r для данного случая. Значит, границы для r будут соответствовать граничным галактическим долготам:

$$\sin l_{min} = \frac{k}{\frac{r_0}{R_0} - 1}, \quad \sin l_{max} = \frac{k}{\frac{r_0}{(1-k)r_0} - 1}$$

$$\sin l_{min} = k\frac{R_0}{r_0 - R_0}, \quad \sin l_{max} = 1 - k$$

Итого, имеем ограничения на галактическую долготу для первого случая:

$$14^\circ \leq l \leq 48^\circ$$

Второй случай. Рассмотрим вариант, когда $r > r_0$, то есть облако дальше от центра Галактики, чем Солнце. Здесь у нас нет дополнительных ограничений на l, поэтому ограничения на галактическую долготу будут определяться из ограничений на r. Заметим, что $r_0 \;/\; r < 1$, поэтому в данном случае $\sin l < 0$. Итак, из прошлого пункта:

$$\sin l = \frac{k}{\frac{r_0}{r} - 1}.$$

При увеличении r значение $\sin l$ в данном случае монотонно растёт. При этом снизу есть естественное ограничение $\sin l \geq -1$. Заметим, что такая граница снизу не выходит за рамки рассматриваемого случая. Действительно, при $\sin l = -1$ получаем $r = 11.2$ кпк, что больше чем r_0, а значит именно $\sin l \geq -1$ является нижней границей. Перейдём к оценке сверху:

$$\sin l = \frac{k}{\frac{r_0}{r} - 1} \leq \frac{k}{\frac{r_0}{R} - 1}.$$

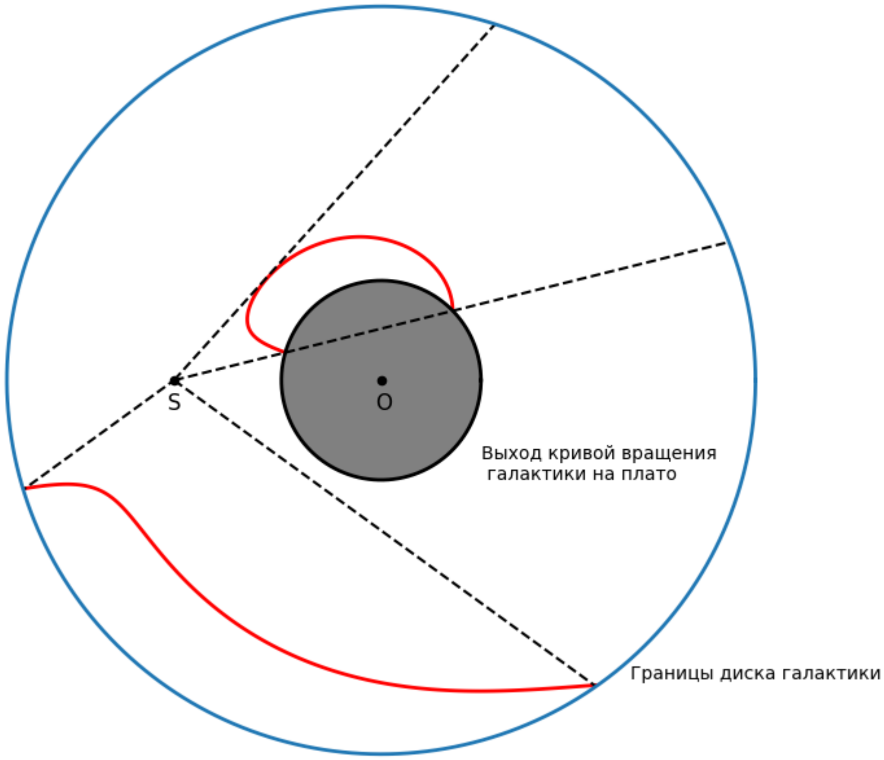
Итого, получаем ограничения на галактическую долготу для второго случая:

$$\sin l_{min} = -1, \quad \sin l_{max} = -k\frac{R}{R - r_0},$$

$$216^\circ \leq l \leq 324^\circ.$$

На рисунке красными линиями обозначены геометрические места точек, где может располагаться облако HI для данного k в обоих случаях.

Ответ: $l \in [14^\circ; 48^\circ] \cup [216^\circ, 324^\circ]$.



Критерии оценивания. **15**

К1. Определение лучевой скорости облака . . . **2**

К2. Оценка скорости вращения на плато и расстояния от Солнца до центра Галактики . . . **2**

К3. Получение уравнения связи для галактической долготы, расстояния и скорости . . . **3**

К4. Рассмотрение случая $r \le r_0$ . . . **5**

Определение максимальной галактической долготы для этого случая . . . 3

Определение минимальной галактической долготы для этого случая (на 4 кпк) . . 2

К5. Рассмотрение случая $r \ge r_0$ . . . **3**

Нахождение диапазона $\sin l$ . . . 2

Диапазон галактических долгот для этого случая . . . 1

Если перепутано направление отсчёта галактической долготы или вращения Галактики, максимальные оценки по К4 и К5 составляют 3 и 2 балла соответственно, остальное оценивается в полной мере.

Если получено неверное, но разумное значение лучевой скорости, К1=0, максимальные баллы за К4 и К5 составляют 4 и 2 соответственно.

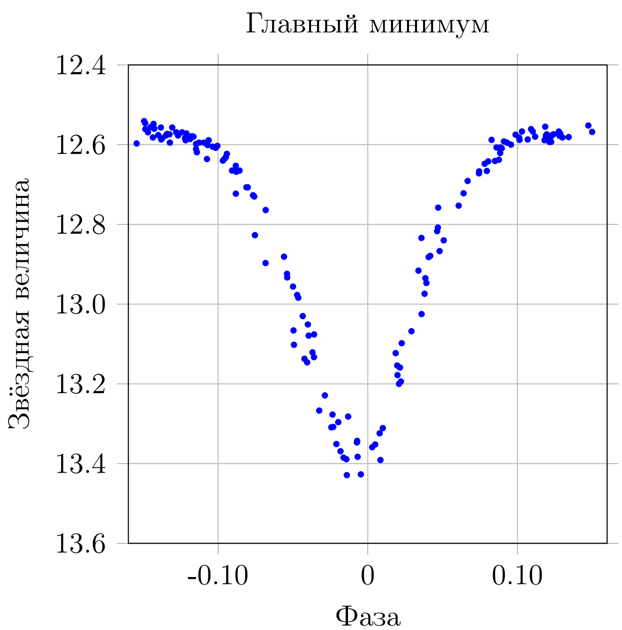
Если в модели участника облако движется в сторону, противоположную движению Солнца, по критерию К3 ставится оценка 0, максимальные оценки за критерии К4, К5 составляют 3 и 2 балла.

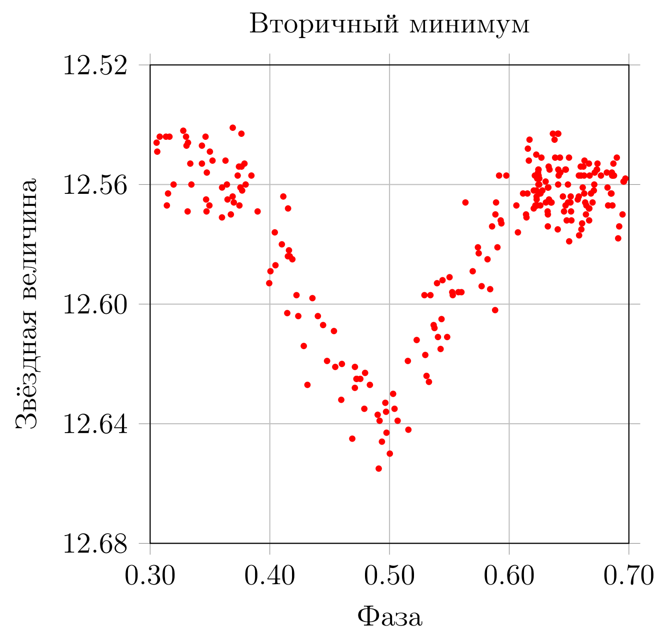
10.4. Звездный градусник

В. Б. Игнатьев, М. В. Кузнецов

Перед вами кривая блеска затменно-переменной звезды с круговыми орбитами. Из спектральных наблюдений известно, что одна из звезд системы полностью аналогична Солнцу. Определите температуру второй звезды.

Потемнением диска к краю и эффектом прогрева пренебречь.





Решение.

Пусть поток от двойной звезды вне затмения равен F_0, поток в главном минимум равен F_1, поток во вторичном минимуме равен F_2.

В главном минимуме закрывается более горячая звезда. Договоримся, что $T_1 > T_2$. Поскольку по условию орбиты звёзд круговые, площадь перекрытия дисков звезд будет одинакова, обозначим её через S.

Запишем выражение для потока от двойной звезды в минимумах: $F_1 = F_0 - \Delta F_1$, $F_2 = F_0 - \Delta F_2$, где ΔF_1 и ΔF_2 — слагаемые, в которых учитывается вклад излучения от площади S закрываемой звезды с температурами T_1 и T_2 соответственно: $\Delta F_1 \sim \sigma T_1^4 S/r^2$, $\Delta F_2 \sim \sigma T_2^4 S/r^2$ (расстояние r до обеих звёзд считаем одинаковым).

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} = \frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2}.$$

Это выражение можно свести к отношению потоков, и, как следствие, к разнице звездных величин. Разделим и числитель, и знаменатель на F_0

$$\frac{1 - F_1/F_0}{1 - F_2/F_0} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$$

Теперь вернемся к графикам, на которых по оси y отложена звездная величина, а не поток. Поэтому нужно провести еще несколько действий. В главном минимуме изменение звездной величины составляет $\Delta m_1 = 0.84^m$, во вторичном минимуме — $\Delta m_2 = 0.09^m$.

Тогда отношение потоков равно

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{-0.4 \cdot 0.84} = 0.46,$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{-0.4 \cdot 0.09} = 0.92.$$

Тогда искомое отношение температур

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1 - 0.46}{1 - 0.92}} \approx 1.6.$$

Нам неизвестно, какой индекс имеет звезда с массой и температурой Солнца. Возможно, это более горячая, а возможно, это более холодная звезда. Рассмотрим оба варианта.

A. Звезда типа Солнца – более горячая звезда. Тогда вторая звезда будет иметь температуру 3600 K.

B. Звезда типа Солнца – более холодная звезда. Тогда вторая звезда будет иметь температуру 9300 K.

Критерии оценивания. **15**

K1. Интерпретация условий задачи **3**

Снятие величины падения блеска в минимумах . . . . 1×2

Данный пункт не является критической точкой задачи, важно чтобы участники смогли с точностью до 10% получить данные величины.

Указание, что при круговых орбитах затмеваемые площади одинаковы 1

Указано в явном виде или используется в решении

K2. Взаимосвязь потоков и перекрываемой площади S **6**

Записан закон Стефана — Больцмана 1

Выражение, описывающее ситуацию в **общем случае для** затмения . . . . 1×2

Исключение площади из рассмотрения 2

Запись и корректное использование формулы Погсона 1

K3. Зависимость отношения температур от потоков (из верных предположений) **2**

В виде формулы или верного численного выражения. За данный критерий частичный балл не предусмотрен.

K4. Получение верного итогового ответа . . . . $\mathbf{2 \times 2}$

Каждый из случаев, когда звезда типа Солнца более горячая, или более холодная, оценивается по 2 балла.

В случае, если участник ошибся в снятии данных на первом этапе, но в дальнейшем реализовал корректное решение, то критерий 4 оценивается в 50% баллов.

В случае, если участник аргументированно рассматривает полное затмение минимальной длительности (нулевая длительность полной фазы), то K1.2 оценивается в 0, K2.2 в 50% баллов, K2.3 в 0 баллов, K3 в 50% баллов.

В случае, если участник рассматривает полное затмение с транзитом (т.е. с заметной длительностью полной фазы, что противоречит имеющимся в условии задачи графикам), то K1.2 оценивается в 0, K2.2 в 50%, K2.3 в 0 баллов, K3 и K4 в 50% баллов.

10.5. Ночью надо спать

А. М. Татарников

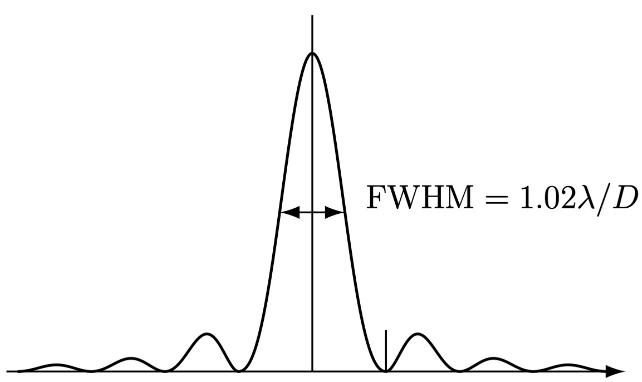
Астроном хотел увидеть звезды на фоне яркого сумеречного неба с помощью своего телескопа диаметром 250 мм и фокусным расстоянием 3 м. При наблюдениях он использовал окуляр, имеющий фокусное расстояние 10 мм и входную полевую диафрагму диаметром 10 мм. Полевая диафрагма установлена в фокальной плоскости объектива и ограничивает поле зрения. Оказалось, что интегральная яркость фона неба, пропускаемого диафрагмой, соответствует яркости звезды 5^m. Определите блеск самой слабой звезды, которую можно увидеть в этот телескоп в этот момент. Наблюдатель перестает видеть звезду, когда поверхностная яркость её изображения становится в 2 раза меньше поверхностной яркости фона неба. Считайте, что: 1) изображение звезды имеет равномерную яркость, 2) угловое разрешение глаза – $1'$, 3) аберрациями и искажениями лучей в атмосфере можно пренебречь.

Решение.

При наблюдениях с окуляром на видимый в телескоп угловой размер звезды влияет несколько факторов. Но в любом случае угловым размером видимого в окуляр диска звезды будет не менее углового разрешения глаза наблюдателя (т.е. $1'$). Увеличение телескопа, плохое качество оптики или атмосферные эффекты могут увеличить видимый размер диска звезды, но не уменьшить его.

Вычислим дифракционное разрешение объектива телескопа. Для этого воспользуемся готовой формулой для визуальных наблюдений (можно использовать общую формулу дифракционного предела, ответ это не изменит)

$$\beta = 140''/D = 0.56'' \qquad (3)$$



На рисунке показан профиль яркости дифракционной картины. По критерию Рэлея дифракционное разрешение объектива численно равно радиусу первого темного кольца дифракционной картины от точечного источника. Из рисунка видно, что полуширина профиля (FWHM) примерно равна этой же величине. В условии указано, что изображение звезды имеет равномерную яркость, значит, его можно считать однородным кружком диаметром β.

Разглядывая это изображение с окуляром, астроном будет видеть его в Γ раз большим по угловым размерам (Γ — увеличение телескопа). Вычислим его:

$$\Gamma = F/f = 300, \tag{4}$$

и найдём угловой размер изображения звезды, каким его видит астроном в окуляр:

$$\beta' = \beta \cdot \Gamma \approx 168''. \tag{5}$$

Полученное значение больше углового разрешения глаза. Это значит, что при данном увеличении именно от размера дифракционного изображения звезды зависит возможность ее наблюдения.

Итак, астроном «на пределе» видит звезду на ярком сумеречном фоне, когда от нее приходит в 2 раза меньше света, чем от площадки фона диаметром $\beta = 0.56''$.

Поле зрения телескопа ограничено полевой диафрагмой окуляра диаметром d и составляет

$$\alpha = 206265d/F \approx 688''. \tag{6}$$

Найдем блеск площадки фона неба с угловым диаметром β:

$$m = 2.5\lg(\alpha/\beta)^2 - 5 \approx 10.4^m. \tag{7}$$

В два раза более слабая звезда будет на 0.75^{m} слабее. Это соответствует звездной величине $\approx 11.2^{\mathrm{m}}$.

Критерии оценивания. **15**

К1. Рассмотрение объектива телескопа **3**
- Вычисление дифракционного разрешения объектива телескопа (с ошибкой $< 10\%$) 1
- Вычисление углового увеличения телескопа (с ошибкой $< 10\%$) 1
- Вычисление углового поля зрения 1

К2. Корректное рассмотрение системы окуляра и объектива **6**
- Корректное вычисление угл. размера равномерно засвеченного диска звезды 2
  Если размер кружка взят в 2β, то ставится 0 баллов.
- Вычисление видимого в окуляр угл. размера изображения звезды (ош. $<20\%$) 1
- Сопоставление видимого углового размера с угловым разрешением глаза 3
  Правильный вывод о том, какую величину использовать в дальнейшем

К3. Определение звездной величины **4**
- Вычисление звездной величины площадки фона неба, ... 3
  соответствующей наблюдаемому изображению звезды
- Учёт условия, что поверх. яркость изображения звезды в 2 раза меньше фона . . . 1
  Данный подкритерий ставится только в случае корректной реализации

К4. Получение верного ответа (с ошибкой $< 20\%$) **2**

При получении звёздной величины (единичной площадки фона неба или площадки, соответствующей наблюдаемому изображению звезды, или самой звезды), больше 18^{m} или меньше -4^{m} итоговая оценка за задачу не может быть больше 8 баллов

Если не учитывается размер дифракционного кружка, то оценка за задачу не может превышать 9 баллов (за К1 не больше 2 баллов, К2 не больше 1 балла)

10.6. Конь G2

М. В. Кузнецов, В. Б. Игнатьев

Спектрально-двойная система, удаленная от Солнца на расстояние 150 пк, состоит из звезд спектральных классов K0IV и G2V. Суммарный блеск системы в полосе V составляет 9.09^m, показатель цвета двойной системы $(B-V)_\Sigma = 0.98^m$, а болометрическая поправка для звезды K0IV составляет $BC_{\text{K0IV}} = -0.19^m$.

A. Определите видимую звездную величину и показатель цвета звезды-субгиганта.

B. Определите разницу показателей цвета для звезд K0V (0.84^m) и K0IV.

C. Определите болометрическую поправку BC_Σ для всей системы.

Межзвездным поглощением в направлении системы можно пренебречь. Не забудьте воспользоваться справочными данными.

Решение.

Определим абсолютную звездную величину в полосе V для звезды G2V, вспомнив, что к этому классу относится Солнце:

$$M_V = m + 5 - 5\lg r = -26.78 + 5 - 5\lg(1/206265) = -21.78 + 5\lg 206265 = 4.79^m.$$

Тогда видимая звездная величина звезды G2V:

$$V_G = M - 5 + 5\lg r = 4.79 - 5 + 5\lg 150 = 10.67^m.$$

Из справочных данных показатель цвета для звезды G2V равен $B-V = 0.65^m$ и, следовательно, видимая величина G2V в полосе B составит $B_G = V_G + (B-V) = 10.67 + 0.65 = 11.32^m$. Найдем видимую звездную величину звезды K0IV из известной общей видимой звездной величины системы:

$$\frac{E_K + E_G}{E_G} = 10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)},$$

$$1 + \frac{E_K}{E_G} = 10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)},$$

$$1 + 10^{-0.4(V_K - V_G)} = 10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)},$$

$$10^{-0.4(V_K - V_G)} = 10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)} - 1,$$

$$V_K = V_G - 2.5\lg\left(10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)} - 1\right) = 10.67 - 2.5\lg\left(10^{-0.4(9.09-10.67)} - 1\right) = 9.38^m.$$

Определим суммарную звездную величину системы в полосе B:

$$(B-V)_\Sigma = B_\Sigma - V_\Sigma,$$

$$B_\Sigma = V_\Sigma + (B-V)_\Sigma = 9.09 + 0.98^m = 10.07^m.$$

Найдем звездную величину звезды K0IV в полосе B из известных звездных величин всей системы и звезды G2V:

$$\frac{E_K + E_G}{E_G} = 10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)},$$

$$1 + \frac{E_K}{E_G} = 10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)},$$

$$1 + 10^{-0.4(B_K - B_G)} = 10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)},$$

$$10^{-0.4(B_K - B_G)} = 10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)} - 1,$$

$$B_K = B_G - 2.5 \lg \left(10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)} - 1\right) = 11.32 - 2.5 \lg \left(10^{-0.4(10.07-11.32)} - 1\right) = 10.49^m.$$

Найдем показатель цвета для звезды K0IV:

$$(B-V)_K = B_K - V_K = 10.49 - 9.38 = 1.11^m$$

Найдем разницу показателей цвета K0IV и K0V:

$$\Delta(B-V) = (B-V)_{IV} - (B-V)_V = 1.11 - 0.84 = 0.27^m$$

Определим болометрическую величину звезды G2V:

$$Bol_G = M - 5 + 5 \lg r = 4.72 - 5 + 5 \lg 150 = 10.60^m,$$

$$BC_G = Bol_G - V_G = 10.60^m - 10.67^m = -0.07^m.$$

Определим болометрическую величину звезды K0IV:

$$Bol_K = V_K + BC_K = 9.38 - 0.19 = 9.19^m.$$

Определим суммарную болометрическую звездную величину системы:

$$\frac{E_K + E_G}{E_G} = 10^{-0.4(Bol_K - Bol_G)},$$

$$Bol_\Sigma - Bol_G = -2.5 \lg \left(\frac{E_K + E_G}{E_G}\right),$$

$$Bol_\Sigma = Bol_G - 2.5 \lg \left(1 + 10^{-0.4(Bol_K - Bol_G)}\right) = 10.60 - 2.5 \lg \left(1 + 10^{-0.4(9.19-10.60)}\right) = 8.93^m.$$

Вычислим болометрическую поправку для двойной системы:

$$BC_\Sigma = Bol_\Sigma - V_\Sigma = 8.93 - 9.09 = -0.16^m.$$

Ответ:

A. $(B-V)_K = 1.11^m$.

B. $\Delta(B-V) = 0.27^m$.

C. $BC_\Sigma = -0.16^m$.

Критерии оценивания. **15**

K1. Верное определение звезды-субгиганта. **1**

Или сказано, что звезда G2V - Солнце

K2. Определение видимой зв.в. для звезды G2V (V_G) **2**

При неверном использовании справочных данных критерий K2 оценивается максимум из 1 балла, K3 и K4 из 2 баллов, а за критерий K5 ставится 0 баллов

K3. Определение видимой зв.в. для звезды K0IV ($V_{\rm K}$) **3**

Запись формулы Погсона в правильном виде и её верное применение 1

Верные вычисления и верный численный ответ 2

K4. Определение показателя цвета для звезды K0IV. **4**

Определение зв.в. в фильтре B для звезды K0IV ($\rm B_K$) 2

Верные вычисления и верный численный ответ 2

K5. Определение разницы показателей цвета K0IV и K0V **1**

K6. Определение болометрической поправки BC для всей системы **4**

Определение болометрической зв.в. для звезды G2V 1

Определение болометрической зв.в. для звезды K0IV 1

Определение болометрической зв.в. для системы 1

Определение болометрической поправки. для системы 1

Баллы за каждый критерий выставляются только при наличии верного численного и формульного ответа.

Если неверное значение $V_{\rm G}$ приводит к нефизичному ответу, то дополнительно за критерии K4.1 и K5 ставится 0 баллов. Остальные можно оценивать в полный балл.

Если неверное значение $V_{\rm K}$ приводит к нефизичному ответу, то дополнительно за критерии K4 и K5 ставится 0 баллов. Остальные можно оценивать в полный балл.