Теоретический тур

Условия, решения и схема оценивания. 9 класс

Содержание

9.1. Калейдоскоп планет

В. Б. Игнатьев

Марс кульминирует в астрономическую полночь на высоте 55°, а Юпитер ровно через 6^{h} на высоте 31.5°. На какой высоте будет кульминировать Солнце в этот день? Чему равна широта места наблюдения? Какая дата наблюдения?

Рефракцией и уравнением времени пренебречь. Орбиты всех планет круговые и лежат в одной плоскости.

Решение. Нижние кульминации планет даже в приполярных регионах не могут происходить выше 23.5°, а значит, в условии могут рассматриваться только их верхние кульминации. Поскольку Марс кульминирует в полночь, то он находится в противостоянии, а Юпитер, кульминирующий спустя 6^{h}, находится в западной квадратуре. Угловое расстояние между точками кульминации планет не может превышать $2\varepsilon = 47°$, где ε — наклон небесного экватора к эклиптике, поскольку их склонения заключены в пределах от $-\varepsilon$ до ε. Значит, кульминации Марса и Юпитера происходят по одну сторону от зенита. Разница высот кульминаций составляет $\Delta h = 55° - 31.5° = 23.5° = \varepsilon$. Этой же величине равна и разность склонений. Поскольку планеты находятся на эклиптике в 90° друг от друга, такая ситуация может быть только в том случае, когда одна из планет находится в одной из точек равноденствий, а другая — в одной из точек солнцестояний.

Случай 1: Юпитер находится в одной из точек равноденствий ($\delta_{\text{Ю}} = 0$). Тогда широта места наблюдения φ определяется из условия для верхней кульминации Юпитера:

$$h_{\text{Ю}\uparrow} = 90° - |\varphi_{1,2} - \delta_{\text{Ю}}| = 90° - |\varphi_{1,2}| = 31.5° \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_{1,2} = \pm 58.5°.$$

Марс кульминирует выше Юпитера, то есть его склонение должно быть по модулю больше склонения Юпитера. При наблюдении в северном полушарии $\delta_{\text{М}1} = 23.5°$, то есть он находится в точке летнего солнцестояния. Солнце находится в противоположной от Марса точке эклиптики — точке зимнего солнцестояния. Следовательно, дата наблюдения — день зимнего солнцестояния (21–22 декабря). Высота Солнца в верхней кульминации будет на ε ниже высоты кульминации Юпитера: $h_1 = h_{\text{Ю}\uparrow} - \varepsilon = 8°$.

Для наблюдателя в южном полушарии Марс также будет кульминировать выше Юпитера, но его склонение составит $\delta_{\text{М}2} = -23.5°$, то есть он окажется в точке зимнего солнцестояния, а Солнце — в точке летнего солнцестояния. Такая ситуация возможна в день летнего солнцестояния (20–21 июня). Высота Солнца в верхней кульминации вновь должна быть на ε ниже высоты Юпитера, то есть $h_2 = 8°$.

Случай 2: Марс находится в одной из точек равноденствия ($\delta_{\text{М}} = 0$). Тогда широту места наблюдения удобно получить из условия для верхней кульминации Марса:

$$h_{M\uparrow} = 90° - |\varphi_{3,4}| = 55° \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_{3,4} = \pm 35°.$$

Поскольку Солнце находится в противоположной точке равноденствия и имеет то же склонение, что и Марс, то и кульминирует на той же высоте, что и Марс:

$$h_{3,4} = 55°.$$

Если наблюдение происходит в день весеннего равноденствия (20–21 марта), то Юпитер, находящийся к западу от Солнца в точке зимнего солнцестояния, имеет склонение $-23.5°$ и кульминирует ниже Марса в северном полушарии. В день осеннего равноденствия (22–23 сентября) склонение Юпитера положительное и подобный случай реализуется в южном полушарии.

Таким образом, возможны четыре варианта ответа, приведенные в таблице:

Дата	$h_\odot$	φ
20–21 марта	55°	35° с. ш.
20–21 июня	8°	58.5° ю.ш.
22–23 сентября	55°	35° ю. ш.
21–22 декабря	8°	58.5° с.ш.

Критерии оценивания. **15**

К1. Марс и Юпитер на небе в 90° **1**

К2. Разность склонений планет равна 23.5° **1**

К3. Планеты находятся в соседних кардинальных точках эклиптики **1**

К4. Правильная тройка ответов (дата, широта, высота) для каждого случая .... **4 × 3**

Если в тройке один ответ неправильный, то такой ответ оценивается в 1 балл вместо 3

9.2. Тихо! Эхо сверхновой

А. С. Аношин

Иоганн Кеплер открыл три своих закона, основываясь на чрезвычайно точных результатах наблюдений великого датского астронома Тихо Браге, с которым он работал в его последний год жизни. В молодые годы Браге наблюдал вспышку сверхновой, которую мы теперь называем сверхновой Тихо. Ее современные координаты: прямое восхождение $\alpha_0 = 00^{\mathrm{h}}\,25^{\mathrm{m}}\,08^{\mathrm{s}}$, склонение $\delta_0 = +64^\circ\,09'\,56''$, а годичный параллакс $\pi'' = (0.43 \cdot 10^{-3})''$.

Спектр сверхновой был определен астрономами в 2006 году благодаря эффекту светового эха. Излучение от вспышки, рассеянное на окружающих пылевых структурах, позволило получить её спектр и установить тип сверхновой. Координаты одной из наблюдаемых пылевых структур $\alpha = 01^{\mathrm{h}}\,46^{\mathrm{m}}\,38^{\mathrm{s}}$, $\delta = +57^\circ 13' 36''$.

1. Оцените расстояние между сверхновой Тихо и этой пылевой структурой. Ответ выразите в световых годах.
2. Одновременно световое эхо от этой сверхновой может наблюдаться на многих пылевых структурах. Выделим любую плоскость, содержащую прямую наблюдатель-сверхновая. Определите вид кривой в этой плоскости, вдоль которой располагаются отражающие структуры?

Решение. Тихо Браге наблюдал свет сверхновой, который двигался к нам по кратчайшему расстоянию. Это произошло совсем недавно по космическим меркам, так что расстояние до места вспышки сверхновой можно считать неизменным. Его можно определить из годичного параллакса:

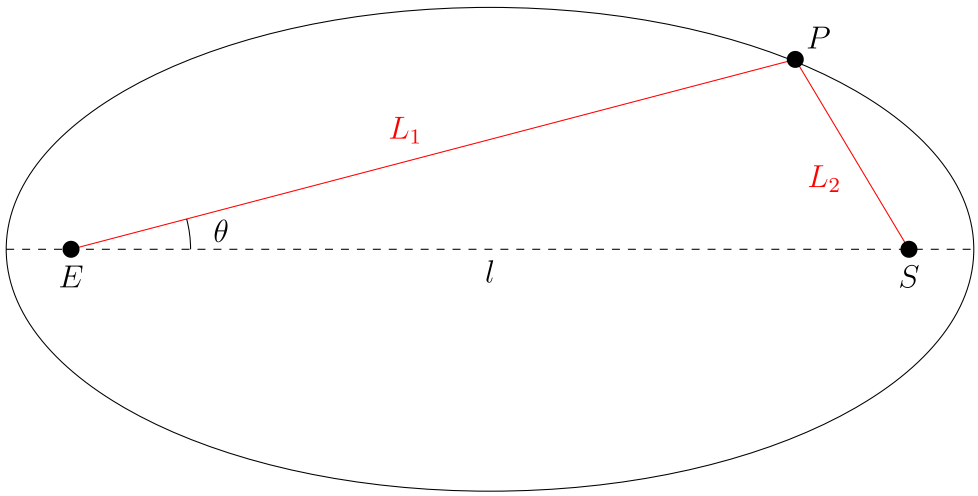
$$l = \frac{1}{\pi['']} = 2.33 \text{ кпк.}$$

Свет, отразившийся от пылевого облака, преодолел расстояние большее l на величину, которую свет проходит за время, прошедшее с момента наблюдения самой сверхновой. Вспышка наблюдалась в 1572 году, то есть за 434 года до определения спектра. Но можно и примерно прикинуть время этого события. Например, опираясь на время работы Кеплера. Другое реперное событие — изобретение телескопа. Тихо Браге был, пожалуй, последней яркой фигурой в дотелескопической астрономии, а Кеплер уже модернизировал телескоп Галилея новым окуляром. Телескоп был изобретен примерно 400 лет назад, а молодость Тихо Браге должна была прийтись не менее чем на четверть века раньше. Для дальнейших вычислений будем принимать величину запаздывания отраженного сигнала равной $\Delta t = 400$ лет. Следовательно, этот сигнал прошел дополнительные 400 световых лет или 123 пк.

Обратимся к рисунку. Обозначим точкой S место вспышки сверхновой, E — положение наблюдателя, а P — пылевую структуру, отразившую свет сверхновой. Расстояние SP обозначим как L_2, EP — как L_1: $L_1 + L_2 = l + c\Delta t$.

Заметим, что последнее уравнение описывает геометрическое место точек P, сумма расстояний которых от двух заданных точек E и S постоянна. Это геометрическое определение эллипса, то есть все отражающие структуры, которые мы можем видеть одновременно лежат на дуге эллипса (поверхности эллипсоида в общем случае).

Обозначим угол $\angle SEP$ как θ. Запишем теорему косинусов для треугольника $\triangle ESP$:



$$L_2^2 = l^2 + L_1^2 - 2lL_1 \cos\theta = l^2 + (l + c\Delta t - L_2)^2 - 2l(l + c\Delta t - L_2)\cos\theta;$$

Раскроем скобки в правой части. Тогда члены с L_2^2 сократятся и уравнение станет линейным относительно L_2. Проведя простые преобразования, получим:

$$L_2 = \frac{l^2 + (l + c\Delta t)^2 - 2l(l + c\Delta t)\cos\theta}{2(l + c\Delta t - l\cos\theta)}.$$

Угол θ — это угловое расстояние между пылевой структурой и сверхновой. Из координат видно, что это расстояние невелико, поэтому можем получить приближенное значение с помощью теоремы Пифагора. Главное, не забывать, что при больших склонениях координатная сетка по прямому восхождению сжата в $\cos\delta$ раз.

$$\theta = \sqrt{\Delta\delta^2 + \Delta\alpha^2 \cdot \cos^2\langle\delta\rangle} = \sqrt{6.9^2 + 20.4^2 \cdot \cos 61^\circ} \approx 12^\circ.$$

Здесь $\langle\delta\rangle$ — среднее значение склонения, $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ — разности прямых восхождений и склонений сверхновой и пылевой структуры. Для любителей сферических треугольников приведем точное решение:

$$\theta = \arccos(\sin\delta \cdot \sin\delta_0 + \cos\delta \cdot \cos\delta_0 \cdot \cos\Delta\alpha) \approx 12^\circ.$$

Из полученной ранее формулы получаем

$$L_2 \approx 760 \text{ пк} = 2500 \text{ св. лет}.$$

Комментарий. Результат с точностью до нескольких процентов совпадает с вычисленным расстоянием в статье «Scattered-light echoes from the historical galactic supernovae Cassiopeia A and Tycho (SN 1572)», из которой брались данные для этой задачи.

Критерии оценивания. 15

K1. Расстояние до сверхновой **1**

K2. Правильное понимание геометрии явления светового эха **1**

Нарисована правильная схема или дано словесное описание явления.

K3. Время, прошедшее с момента наблюдения сверхновой (от 370 до 500 лет) **3**

Если ответ не попадает в правильный диапазон, но попадает в диапазон [250; 550], то за этот критерий выставляется 1 балл, иначе — 0 баллов. Дальнейшее решение оценивается полностью, кроме K7.

K4. Вывод, что структуры располагаются вдоль эллипса **2**

Ответ без обоснования не оценивается

K5. Вычисление угла θ **2**

Если не учтен $\cos\langle\delta\rangle$, то 1 балл. Допустимо вместо $\langle\delta\rangle$ использовать склонение сверхновой или структуры.

K6. Вывод формулы для вычисления L_2 . . . . **3**

K7. Окончательный ответ в диапазоне от 2200 до 2600 св. лет **3**

Ответ дан не в световых годах — оценка за критерий снижается на 1 балл.

Ответ дан вне правильного диапазона, но в диапазоне [2090; 3200] св. лет — штраф 1 балл.

В остальных случаях оценка за этот пункт не выставляется.

9.3. Одно из двух

А. Н. Акиньщиков

С помощью телескопа составляется каталог всех звёзд, видимый поток от которых превышает фиксированный порог. В окрестностях Солнца на один красный гигант приходится 400 звезд, подобных Солнцу (желтых карликов). Абсолютная звездная величина красных гигантов равна -0.5^m, а желтых карликов 5^m. Считайте, что звёзды распределены в пространстве равномерно, а поглощением света можно пренебречь. Какой класс звёзд из представленных окажется более многочисленным в итоговом каталоге и во сколько раз?

Решение. Поток от звезды светимости L на расстоянии d равен

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}.$$

Минимальному значению потока F_{min} соответствуют звезды, находящиеся на максимальном расстоянии d_{max}. Тогда

$$d_{\text{max}} = \sqrt{\frac{L}{4\pi F_{\text{min}}}} \propto L^{1/2}.$$

Пусть $V_{\text{max}} = \frac{4}{3}\pi d_{\text{max}}^3$ — объем, в котором находятся все видимые звезды данного типа. Тогда число звезд в этом объеме:

$$N = nV = \frac{4}{3}\pi\, n\, d_{\text{max}}^3 \propto n\, d_{\text{max}}^3 \propto nL^{3/2},$$

где n — пространственная плотность числа звёзд данного типа. Следовательно, отношение числа красных гигантов N_{g} к числу карликов N_{d} равно:

$$\frac{N_{\text{g}}}{N_{\text{d}}} = \frac{n_{\text{g}}}{n_{\text{d}}} \left(\frac{L_{\text{g}}}{L_{\text{d}}}\right)^{3/2}.$$

Абсолютные звездные величины гигантов и карликов отличаются на 5.5^m звездных величин. Тогда из формулы Погсона получаем:

$$\frac{L_{\text{g}}}{L_{\text{d}}} = 10^{-0.4(-0.5-5)} \approx 158.$$

Отношение пространственных плотностей задано в условии. Подставим числа:

$$\frac{N_{\text{g}}}{N_{\text{d}}} = \frac{1}{400} \cdot 158^{3/2} \approx \frac{1986}{400} \approx 5.$$

Значит, в таком каталоге красных гигантов окажется в 5 раз больше, при том, что в пространстве они встречаются в 400 раз реже. Причина этого кажущегося парадокса в том, что яркая звезда видна с гораздо большего расстояния, то есть мы их выбираем из гораздо большего объема пространства.

Альтернативное решение. Выразим предельные звездные величины для красных гигантов и желтых карликов:

$$m_{\text{lim}} = M_g - 5 + 5\lg d_{\text{max}\,g},$$

$$m_{\lim} = M_d - 5 + 5\lg d_{\max d}.$$

Так как предельная звездная величина одинакова из-за одинакового предельного потока:

$$M_g - 5 + 5\lg d_{\max g} = M_d - 5 + 5\lg d_{\max d},$$

$$5\lg d_{\max g} - 5\lg d_{\max d} = M_d - M_g.$$

Тогда отношение предельных расстояний:

$$\frac{d_{\max g}}{d_{\max d}} = 10^{\frac{M_d - M_g}{5}} = 10^{\frac{5-(-0.5)}{5}} = 10^{1.1} \approx 12.59,$$

и итоговое отношение числа звезд:

$$\frac{N_\mathrm{g}}{N_\mathrm{d}} = \frac{n_\mathrm{g}}{n_\mathrm{d}} \frac{\frac{4}{3}\pi\, d^3_{\max g}}{\frac{4}{3}\pi\, d^3_{\max d}} = \frac{12.59^3}{400} = \frac{1986}{400} \approx 5.$$

Критерии оценивания. **15**

K1. Связь $d_{\max}$ со светимостью звезды (должна быть в явном виде) **2**

Например: $F = \frac{L}{4\pi d^2}$, $m_{lim} = M_g - 5 + 5\lg d_{\max g}$ или аналогичные

K2. Связь N и $d_{\max}$ (должна быть в явном виде) **2**

Например: $N = \frac{4}{3}\pi\, n\, d^3_{\max}$ или аналогичные

K3. Определение отношения светимостей **4**

Формула Погсона в подходящей для вычисления форме в явном виде 2

Правильное значение отношения светимостей 2

Если участник не производит отдельного вычисления отношения светимостей, то последние 2 балла добавляются к оценке за правильный итоговый ответ и выставляются в зависимости от его правильности. Если участник приводит только численные значения (только подстановку), то общая оценка за этот пункт не превышает 2 баллов

K4. Формула для отношения числа звезд **4**

K5. Правильный численный ответ **3**

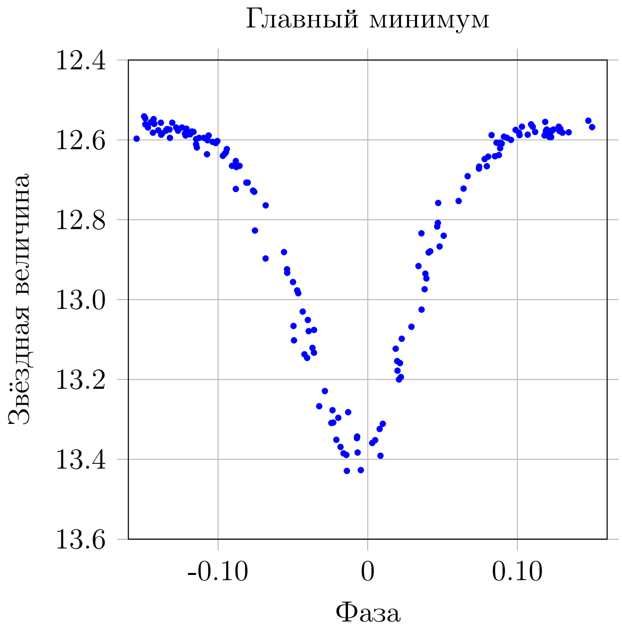
Выставляется только за правильный ответ при отсутствии ошибок в предыдущих частях задачи.

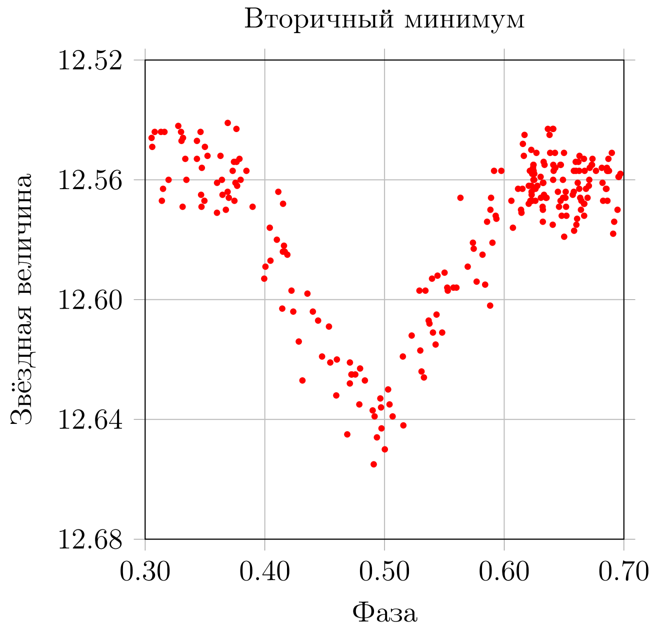
9.4. Звездный градусник

В. Б. Игнатьев, М. В. Кузнецов

Перед вами кривая блеска затменно-переменной звезды с круговыми орбитами. Из спектральных наблюдений известно, что одна из звезд системы полностью аналогична Солнцу. Определите температуру второй звезды.

Потемнением диска к краю и эффектом прогрева пренебречь.





Решение.

Пусть поток от двойной звезды вне затмения равен F_0, поток в главном минимум равен F_1, поток во вторичном минимуме равен F_2.

В главном минимуме закрывается более горячая звезда. Договоримся, что $T_1 > T_2$. Поскольку по условию орбиты звёзд круговые, площадь перекрытия дисков звезд будет одинакова, обозначим её через S.

Запишем выражение для потока от двойной звезды в минимумах: $F_1 = F_0 - \Delta F_1$, $F_2 = F_0 - \Delta F_2$, где ΔF_1 и ΔF_2 — слагаемые, в которых учитывается вклад излучения от площади S закрываемой звезды с температурами T_1 и T_2 соответственно: $\Delta F_1 \sim \sigma T_1^4 S/r^2$, $\Delta F_2 \sim \sigma T_2^4 S/r^2$ (расстояние r до обеих звёзд считаем одинаковым).

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} = \frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2}.$$

Это выражение можно свести к отношению потоков, и, как следствие, к разнице звездных величин. Разделим и числитель, и знаменатель на F_0

$$\frac{1 - F_1/F_0}{1 - F_2/F_0} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$$

Теперь вернемся к графикам, на которых по оси y отложена звездная величина, а не поток. Поэтому нужно провести еще несколько действий. В главном минимуме изменение звездной величины составляет $\Delta m_1 = 0.84^m$, во вторичном минимуме — $\Delta m_2 = 0.09^m$.

Тогда отношение потоков равно

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{-0.4 \cdot 0.84} = 0.46,$$
$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{-0.4 \cdot 0.09} = 0.92.$$

Тогда искомое отношение температур

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1 - 0.46}{1 - 0.92}} \approx 1.6.$$

Нам неизвестно, какой индекс имеет звезда с массой и температурой Солнца. Возможно, это более горячая, а возможно, это более холодная звезда. Рассмотрим оба варианта.

1. Звезда типа Солнца – более горячая звезда. Тогда вторая звезда будет иметь температуру 3600 K.

2. Звезда типа Солнца – более холодная звезда. Тогда вторая звезда будет иметь температуру 9300 K.

Критерии оценивания. **15**

K1. Интерпретация условий задачи ... **3**

Снятие величины падения блеска в минимумах ... 1×2

Данный пункт не является критической точкой задачи, важно чтобы участники смогли с точностью до 10% получить данные величины.

Указание, что при круговых орбитах затмеваемые площади одинаковы ... 1

Указано в явном виде или используется в решении

K2. Взаимосвязь потоков и перекрываемой площади S ... **6**

Записан закон Стефана — Больцмана ... 1

Выражение, описывающее ситуацию в **общем случае для** затмения ... 1×2

Исключение площади из рассмотрения ... 2

Запись и корректное использование формулы Погсона ... 1

K3. Зависимость отношения температур от потоков (из верных предположений) ... **2**

В виде формулы или верного численного выражения. За данный критерий частичный балл не предусмотрен.

K4. Получение верного итогового ответа ... $\mathbf{2 \times 2}$

Каждый из случаев, когда звезда типа Солнца более горячая, или более холодная, оценивается по 2 балла.

В случае, если участник ошибся в снятии данных на первом этапе, но в дальнейшем реализовал корректное решение, то критерий 4 оценивается в 50% баллов.

В случае, если участник аргументированно рассматривает полное затмение минимальной длительности (нулевая длительность полной фазы), то K1.2 оценивается в 0, K2.2 в 50% баллов, K2.3 в 0 баллов, K3 в 50% баллов.

В случае, если участник рассматривает полное затмение с транзитом (т. е. с заметной длительностью полной фазы, что противоречит имеющимся в условии задачи графикам), то K1.2 оценивается в 0, K2.2 в 50%, K2.3 в 0 баллов, K3 и K4 в 50% баллов.

9.5. Два в одном

В. Б. Игнатьев

Полное лунное затмение вместе с частными теневыми фазами наблюдалось с 20:35 до 24:00 по всемирному времени. Одновременно вместе с затмением произошло покрытие Луной звезды Завийява, которое было видно только в небольшой части южного полушария.

1. Определите длительность полной фазы этого лунного затмения.
2. Определите дату этого затмения.
3. Оцените возможные широты, на которых можно было наблюдать покрытие Завийявы.

Орбиты Земли и Луны считайте круговыми. Эклиптические координаты Завийявы: широта $\beta = 41'$, долгота $\lambda = 177°$. Изменением эклиптической широты Луны за время затмения пренебречь.

Решение. Рассмотрим конус тени (см. рисунок ниже), который образует подобные треугольники, используя которые можно записать

$$\frac{R_\odot}{a_\oplus + x_2} = \frac{R_\oplus}{x_2} = \frac{R_2}{x_2 - a_☾},$$

где $R_\odot$ и $R_\oplus$ — это радиусы Солнца и Земли соответственно, R_2 — радиус тени на удалении Луны ($a_☾$) от Земли, $a_\oplus$ — большая полуось орбиты Земли, x_2 — длина конуса земной тени. Выражаем из первого равенства x_2, получаем:

$$x_2 = a_\oplus \frac{R_\oplus}{R_\odot - R_\oplus} = 1.496 \cdot 10^8 \cdot \frac{6370}{696\,000 - 6370} \approx 1.38 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

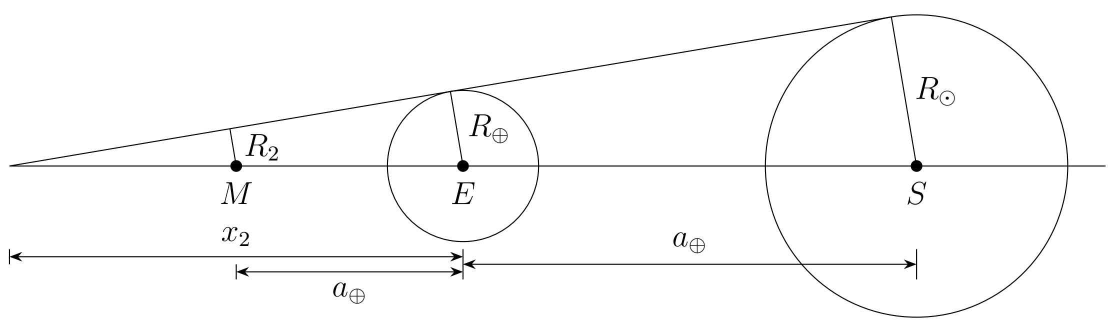


Рис. 1: Схема образования земной тени.

Из второго равенства выразим R_2:

$$R_2 = R_\oplus \frac{x_2 - a_☾}{x_2} \approx 4600 \text{ км}.$$

Определим длину хорды, по которой проходит Луна через земную тень. Стоит отметить, что в пространстве двигается и Луна и тень. Эту задачу можно решить через относительную угловую скорость (разность угловой скорости Луны и тени), которая связана с синодическим периодом. Или же можно остаться в логике линейный скоростей, считая, что

$$v = \frac{2\pi a_☾}{S} = 0.947 \text{ км/с}.$$

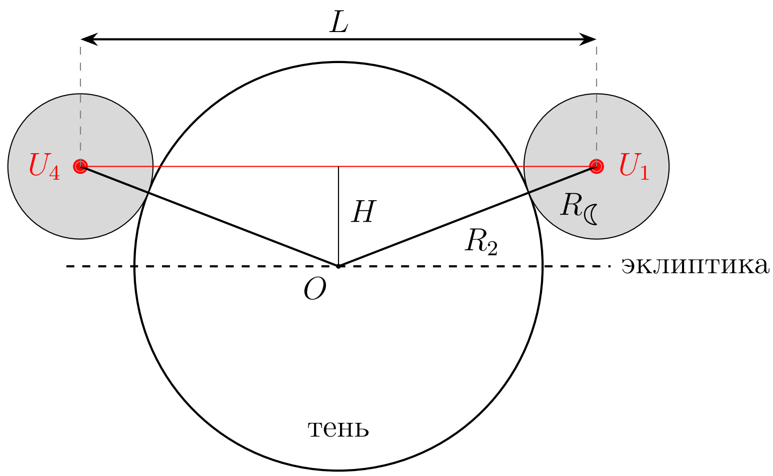


Рис. 2: Схема лунного затмения. Точка U_1 – момент начала затмения, диск Луны заходит в тень. Точка U_4 – момент окончания затмения.

где S — синодический период Луны.

Если затмение не центральное, Луна проходит через тень не по диаметру, а по некоторой хорде. Расстояние, которое проходит центр Луны относительно тени в течение затмения можно определить, зная относительную скорость Луны и продолжительность затмения T:

$$L = vT = 12\,300 \text{ с} \cdot 0.947 \text{ км/с} \approx 11\,650 \text{ км}.$$

Высота, на которой центр Луны проходит выше или ниже центра тени H равна

$$H = \sqrt{(R_2 + R_☾)^2 - (L/2)^2} = 2490 \text{ км}.$$

Теперь определим расстояние, которое проходит центр Луны во время полной фазы затмения:

$$L_2 = 2\sqrt{(R_2 - R_☾)^2 - H^2} \approx 2820 \text{ км}.$$

Тогда искомое время полной фазы равно

$$\Delta t_2 = \frac{L_2}{v} = \frac{2820 \text{ км}}{0.947 \text{ км/с}} = 2970 \text{ с} \approx 50 \text{ мин}.$$

Второй вопрос задачи – определим дату затмения. Воспользуемся двумя фактами.

1. Во время полного лунного затмения Луна находится в противоположной Солнцу точке неба. Следовательно, эклиптическая долгота Солнца отличается от долготы Луны на $180°$.

2. Происходит покрытие Луной звезды с долготой $\lambda = 177°$.

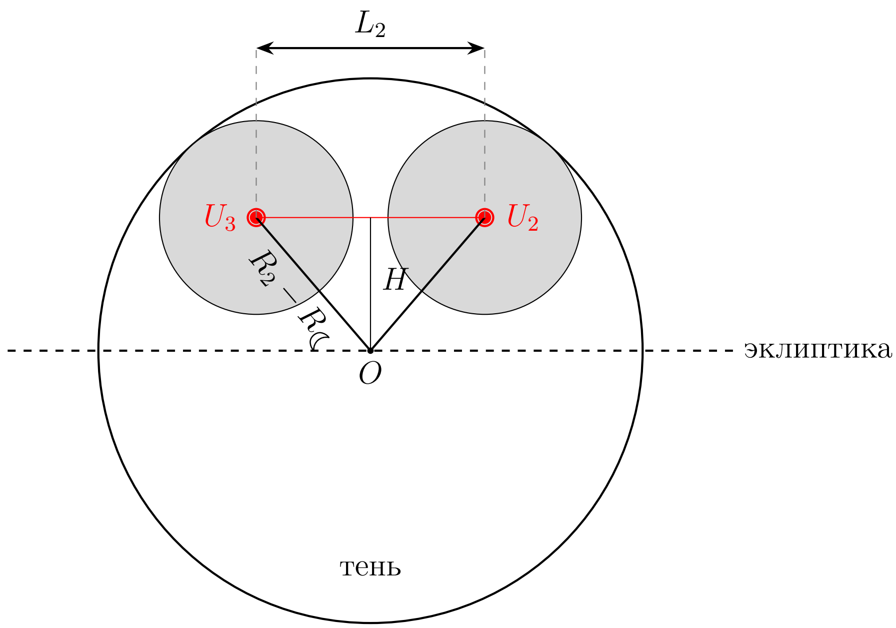


Рис. 3: Схема полной фазы лунного затмения. Точка U_2 – момент начала полной фазы затмения, диск Луны полностью заходит в тень. Точка U_3 – момент окончания затмения.

Следовательно, долгота Солнца $\lambda_\odot = 357°$, то есть Солнце не дошло до точки весеннего равноденствия 3 дня. С учетом того, что равноденствие может приходиться на 19–21 марта, то ответ на второй вопрос 16–18 марта.

Перейдем к **третьему вопросу**. На первом этапе решения задачи мы определили, что Луна проходит выше или ниже центра тени, который лежит на эклиптике. Переведем эту высоту в градусную меру:

$$\beta_☾ = \frac{206265 H}{a_☾} = 1336'' \approx 22'.$$

Видимость покрытия будет обусловлена параллактическим эффектом. Если Луна находится выше эклиптики, то покрытие звезды можно увидеть почти на всех широтах, в том числе и в северном полушарии, что противоречит условию задачи. Напротив, если Луна находится ниже эклиптики, то эффект параллакса будет поднимать Луну, если наблюдатель смещается на юг.

Если наблюдатель переместится на самую удаленную точку Земли от эклиптики, то Луна изменит свое положение относительно звезд на величину параллакса Луны:

$$p = \frac{206265 R_\oplus}{a_☾} = 57'$$

В этом случае центр Луны окажется на эклиптической широте $-22' + 57' = 35'$, что ни-

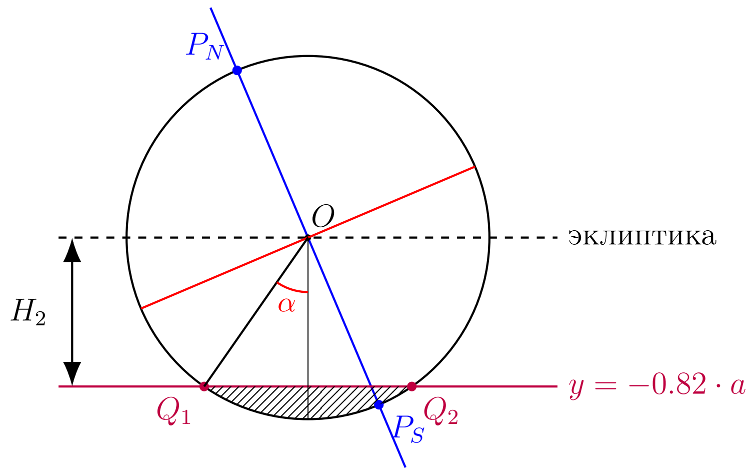


Рис. 4: Вид с Луны на Землю в момент равноденствия. Заштрихованная область — область где возможно наблюдение покрытия.

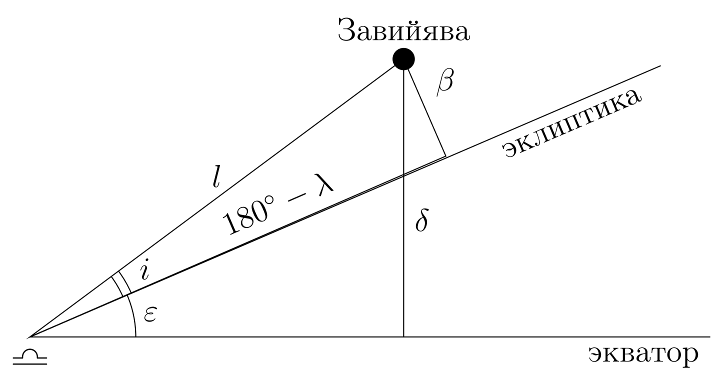
же широты Завияки на $6'$. С учетом того, что Луна имеет значительный угловой радиус ($\approx 16'$), наблюдатель в самой нижней точке от эклиптики будет наблюдаться покрытие звезды. Также, если подняться выше к плоскости эклиптики (это не обязательно севернее), то покрытие будет наблюдаться до момента, пока суточный параллакс Луны будет больше, чем $57' - 16' + 6' = 47'$.

Определим предельную эклиптическую широту верхнего края Луны, при которой покрытие еще наблюдается: она равна $41'$. Отсюда находим минимальное параллактическое смещение для наблюдателя, который сможет увидеть покрытие: $47'$. Это смещение соответствует линейному расстоянию от эклиптики $H_2 = 5255$ км.

Определим угол α (см. рисунок)

$$\cos\alpha = \frac{H_2}{R_\oplus} = \frac{5255}{6371} \qquad \to \qquad \alpha = 34.4^\circ$$

Так как самая удаленная от эклиптики точка в день весеннего равноденствия имеет широту -66.5°, то максимальная широта, на которой можно увидеть покрытие Завийявы равна -32.1°.



Завийява располагается чуть менее чем на градус выше эклиптики, а ее эклиптическая долгота немного меньше долготы точки осеннего равноденствия. В этой области эклиптика выше экватора, следовательно, склонение Завийявы положительное и с Южного полюса она не видна. Приблизительно можно оценить склонение в 1°–2°, но это значение можно получить и более точно. Поскольку мы рассматриваем очень небольшую площадку на небе, воспользуемся плоским приближением. Расстояние от точки весеннего равноденствия до звезды равно $l = \sqrt{(41')^2 + (3°)^2} \approx 3°$, а наклон l к эклиптике $i = \operatorname{arctg} \frac{41'}{3°} \approx 13°$. Отсюда склонение Завийявы равно

$$\delta = l \sin(\varepsilon + i) = 1°48',$$

а самая южная широта наблюдения покрытия $88°12'$ ю. ш.

Таким образом, наблюдать покрытие Завийявы можно на широтах от 32.1 ю. ш. до 88.2 ю. ш.

Критерии оценивания. **15**

К1. Длительность полной фазы затмения **7**
- Схема образования земной тени 1
- Радиус или диаметр земной тени 1
- Линейная или угловая относительная скорость движения Луны 1
- Расстояние, проходимое центром Луны относительно тени в течение затмения . . . 1
- Расстояние между центром тени и линией движения центра Луны 1
- Расстояние, проходимое центром Луны относительно тени в течение полной фазы 1
- Продолжительность полной фазы 1

Если принято, что Луна находится на эклиптике, то оценка за критерий не превышает 3 баллов.

К2. Дата затмения **2**
- Луна противоположна Солнцу 1
- Дата затмения 16–18 марта 1

К3. Область видимости покрытия **6**
- Найден параллакс Луны 1
- Перевод высоты H в градусную меру 1
- Эклиптическая широта Луны в самой удаленной точке Земли от эклиптики 1
- Минимальное параллактическое смещение для наблюдения покрытия 1
- Определение диапазона широт . . . . . 1+1

Если принято, что Луна находится на эклиптике, то оценка за критерий не превышает 2 баллов.

9.6. Восточный экспресс

В. Б. Игнатьев

Корпорация «Роскосмос» запускает ракету-носитель со спутником с космодрома Восточный ($\lambda = 128°20'$ в. д., $\varphi = 51°53'$ с. ш.). На первом этапе ракета-носитель выводит спутник на опорную круговую орбиту высотой 270 км, для которой космодром Восточный является самой северной точкой орбиты.

Через несколько оборотов при пересечении плоскости экватора Земли спутник переходит на промежуточную эллиптическую орбиту того же наклонения, апоцентрическое расстояние которой равно радиусу орбиты геостационарных спутников. На этой орбите спутник может совершить несколько оборотов. Оказавшись в апоцентре промежуточной орбиты, спутник еще одним маневром переходит на геостационарную орбиту. Считайте, что все маневры, включая вывод на опорную орбиту, совершаются мгновенно.

Определите оптимальное число витков спутника на опорной и на промежуточной орбитах, необходимое для вывода спутника на геостационарную орбиту с долготой Уфы ($\lambda = 56°$ в. д.) с точностью не хуже 3 градусов. При этом суммарная продолжительность перехода не должна превышать 48 часов от момента запуска.

Решение.

Будем решать задачу в системе отсчета центра Земли.

Этап 1. Определение времен всех маневров.

Определим период обращения спутника на опорной круговой орбите.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a_1^3}{GM_\odot}} = 5372 \text{ секунд}$$

Теперь рассмотрим промежуточную эллиптическую орбиту. Определим афелийное расстояние на этой орбите:

$$a_G = \sqrt[3]{\frac{GM_\odot T_\odot^2}{2\pi}} = 42.23 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Отметим, что в качестве периода обращения Земли для расчетов геоцентрической орбиты нужно подставлять звездные сутки, не 24 часа, а $23^h56^m04^s = 86164^s$.

Большая полуось эллиптической орбиты находится как

$$a_2 = \frac{a_1 + a_G}{2}$$

Период обращения аппарата на этой орбите составляет

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a_2^3}{GM_\odot}} = 2\pi\sqrt{\frac{(a_1 + a_G)^3}{8GM_\odot}} \approx 37\,925^s$$

Этап 2. Расчеты долгот. За некоторое время Δt Земля повернется на угол

$$\alpha = \frac{\Delta t}{86164} \cdot 360^\circ$$

Но при этом спутник сделает нецелое число витков вокруг центра Земли.

Переход между опорной и промежуточной орбитами осуществляется в точке в экваториальной плоскости Земли, а начальная точка по условию является самой северной точкой орбиты. Поэтому на опорной орбите спутник может сделать целое число витков n ($n = 0, 1, 2...$) и либо $\frac{1}{4}$, либо $\frac{3}{4}$ оборота. За один оборот спутника на этой орбите Земля провернется под ним на угол 22.4°.

На промежуточной эллиптической орбите период спутника равен $T_2 = 37\,925$ секунд, что соответствует повороту Земли на 158.5°. Для выхода на геостационарную орбиту спутнику на промежуточной орбите необходимо сделать полуцелое число оборотов $k + \frac{1}{2}$. Где $k = 0, 1, 2....$

Этап 3. Последовательность маневров.

Выработаем последовательность маневров для вывода спутника на долготу Уфы. Для решения этой задачи расчеты разумнее производить через углы поворота, а не через время. Но в конце решения надо будет проверить, чтобы итоговое время оказалось менее 48 часов.

Рассмотрим случай, когда на первой орбите спутник сделает $n + \frac{1}{4}$ витков.

Тогда после всех маневров спутник сделает

$$N = n + \frac{1}{4} + k + \frac{1}{2} \text{ витков,}$$

и спутник окажется на долготе λ при старте с долготы λ_0:

$$\lambda = \lambda_0 - 90^\circ - (n + \frac{1}{4}) \cdot 22.4^\circ - (k + \frac{1}{2}) \cdot 158.5^\circ$$

Упростим выражение, оставив только целочисленные переменные n и k:

$$\lambda = \lambda_0 - 90^\circ - 84.85^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

Подставим значения λ и λ_0:

$$56^\circ = 128.3^\circ - 90^\circ - 84.85^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

Упростим:

$$-102.5^\circ + 360^\circ \cdot M = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k, \quad (1)$$

здесь M – целое число оборотов Земли.

В случае, если мы рассматриваем на первой орбите $n + \frac{3}{4}$ оборота перед переходом на вторую эллиптичную орбиту, то выражение будет иметь вид

$$\lambda = \lambda_0 + 90^\circ - (n + \frac{3}{4}) \cdot 22.4^\circ - (k + \frac{1}{2}) \cdot 158.5^\circ$$

$$56^\circ = 128.3^\circ + 90^\circ - 98.3^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

$$66.25^\circ + 360^\circ \cdot M = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k \tag{2}$$

Теперь надо подобрать целые числа n и k, при которых равенство выполняется.

Составим таблицу угла смещения для различных n и k:

$$f(\lambda) = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k$$

и сравним полученные значение с искомыми.

$$\begin{cases} 257.45^\circ = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k \quad \text{или} \\ 66.25^\circ = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k \end{cases}$$

	0	1	2	3
1	22.4	180.9	339.4	497.9
2	44.8	203.3	361.8	520.3
3	67.2	225.7	384.2	542.7
4	89.6	248.1	406.6	565.1
5	112	270.5	429	587.5
6	134.4	292.9	451.4	609.9
7	156.8	315.3	473.8	632.3
8	179.2	337.7	496.2	654.7
9	201.6	360.1	518.6	677.1
10	224	382.5	541	699.5
11	246.4	404.9	563.4	721.9
12	268.8	427.3	585.8	744.3
13	291.2	449.7	608.2	766.7
14	313.6	472.1	630.6	789.1
15	336	494.5	653	811.5
16	358.4	516.9	675.4	833.9

По вертикальной оси n – целое число витков на первой орбите, по горизонтальной оси k – целое число витков на второй орбите. Для стратегии с $n + \frac{1}{4}$ нас интересуют значения угла поворота 257.45° или $257.45^\circ + 360^\circ$, а для стратегии $n + \frac{3}{4}$ – значение 66.25°.

Из таблицы видим, что первый сценарий реализовать не получится, а второй реализуется при $n = 3$ и $k = 0$. Проверим, сколько времени потребуется для реализации всех маневров.

$$\Delta T = (n + \frac{3}{4}) \cdot T_1 + (k + \frac{1}{2}) \cdot T_2$$

$$\Delta T = (3 + \frac{3}{4}) \cdot 5370^s + \frac{1}{2} \cdot 37925^s = 39\,100^s \approx 10.9 \text{ часа.}$$

Альтернативные решения.

Найденная пара $n = 3,\ k = 0$ является оптимальной по времени перехода, однако не единственной. Если продолжить таблицу значений $f(\lambda)$ из стратегии $n + \frac{3}{4}$ на большие значения n (т.е. рассматривать варианты, в которых правая часть равенства (2) обходит лишние 360° за счёт дополнительных оборотов Земли), обнаруживаются ещё два попадания в окрестность Уфы — $n = 19,\ k = 0$ и $n = 12,\ k = 1$. В обоих случаях суммарное время составляет около 34.9 часа, то есть формальным условиям варианты удовлетворяют.

Кроме того, условие задачи фиксирует наклонение опорной орбиты ($i = 51.88°$, поскольку космодром Восточный — самая северная её точка), но не задаёт направление обращения спутника. При запуске «против вращения Земли» (по ретроградной орбите) положения восходящего и нисходящего узлов в инерциальной системе меняются местами, и формулы (1) и (2) переходят друг в друга с заменой знака. Перебор показывает, что в коридоре $\pm 3°$ от Уфы и в пределах 48 часов реализуются ещё три ретроградных решения – $n = 11,\ k = 0$, $n = 4,\ k = 1$ (около 22.9 часа), а также $n = 27,\ k = 0$ (около 46.9 часа).

Сводная таблица всех найденных в рамках условий задачи решений приведена ниже. Оптимальным остаётся прямой запуск $n = 3,\ k = 0$ – наименьшее время и наиболее реалистичный по энергозатратам вариант.

№	Запуск	n	k	ΔT, ч	Ошибка от Уфы
1	прямой	3	0	10.9	$-1.5°$
2	ретроградный	11	0	22.9	$-1.8°$
3	ретроградный	4	1	22.9	$-2.5°$
4	прямой	19	0	34.9	$-2.1°$
5	прямой	12	1	34.9	$-2.8°$
6	ретроградный	27	0	46.9	$-2.4°$

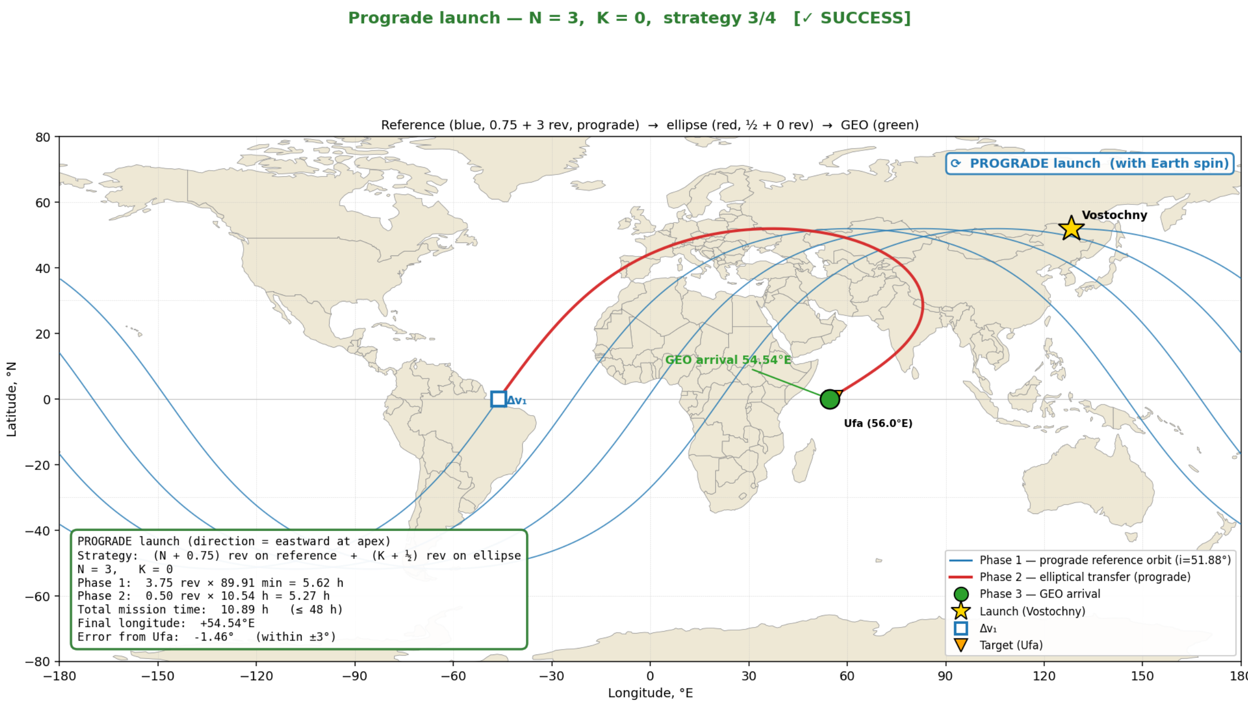


Рис. 5: Решение №1. Прямой запуск, $n = 3,\ k = 0$. Оптимальное по времени решение задачи: $\Delta T \approx 10.9$ ч, конечная долгота $54.5°$ в. д.

Критерии оценивания. **15**

K1. Определение времени всех маневров **4**

Период обращения спутника на опорной орбите 1

Апогейное расстояние на опорной орбите 1

Большая полуось эллиптической орбиты 1

Период обращения спутника на эллиптической орбите 1

В случае, если участник в качестве периода Земли берет 86400 секунд, оценка по данном критерию снижается на 1 балл

K2. Определение угла поворота Земли **3**

Формула, связывающая угол поворота Земли со временем 1

В случае, если участник в качестве периода Земли берет 86400 секунд, оценка по данному подкритерию 0 баллов

Значение угла поворота Земли за один оборот на опорной орбите ($22.4°$) 1

Значение угла поворота Земли за один оборот на эллиптичной орбите ($158.5°$) . . . 1

K3. Определение оптимального числа витков **8**

Ниже описан популярный пошаговый сценарий решения участника. Тем не менее, участник сразу мог рассмотреть случай $n+\frac{3}{4}$, и найти любое решение, удовлетворяющее условию задачи. В этом случае его решение оценивается в 8 баллов по данному критерию.

Утверждение, что на опорной орбите нужно сделать $n + \frac{1}{4}$ или $n + \frac{3}{4}$ оборота . . 1+1

Получена формула (1) или ей аналогичная для случая $n + \frac{1}{4}$ 1

Получена верный ответ для случая $n + \frac{1}{4}$. (Решения нет) 1

Получена формула (2) или ей аналогичная для случая $n + \frac{3}{4}$ 1

Получена верные ответы n и k. для случая $n + \frac{3}{4}$ . . . . . 1+1

Проверено, что суммарное время маневров меньше 48 часов 1

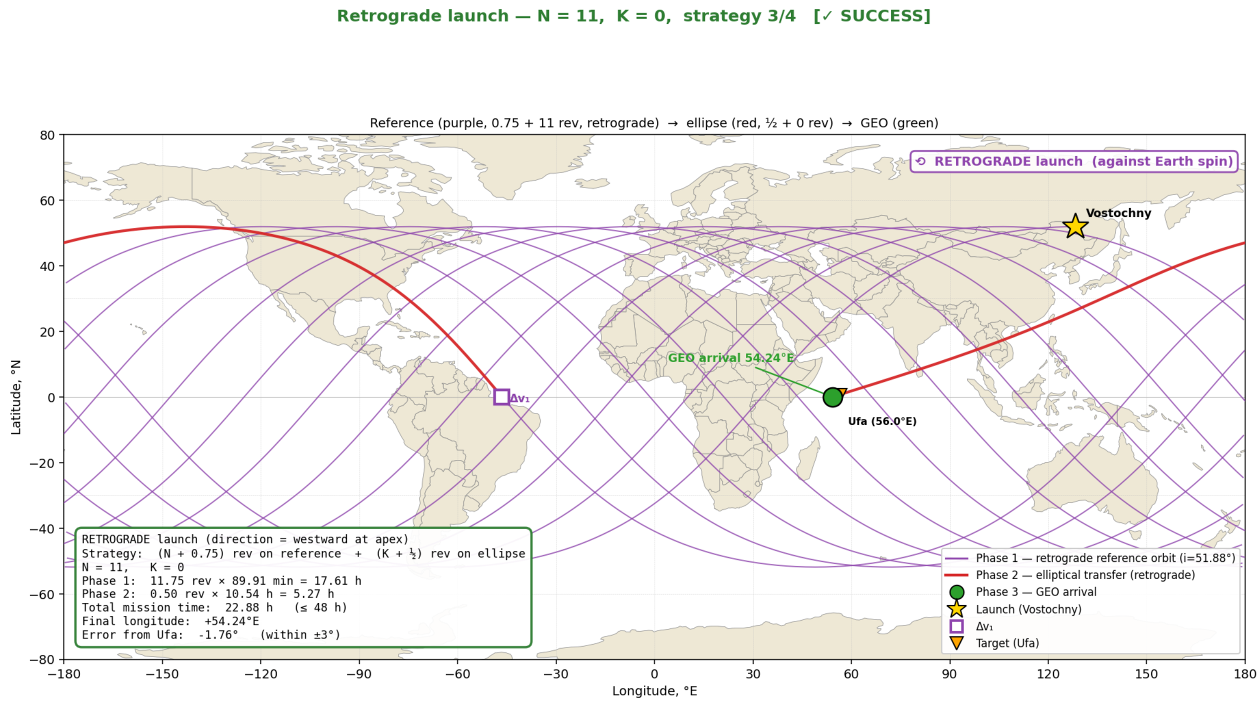


Рис. 6: Решение №2. Ретроградный запуск, $n = 11,\ k = 0$. $\Delta T \approx 22.9$ ч, конечная долгота $54.2°$ в. д.

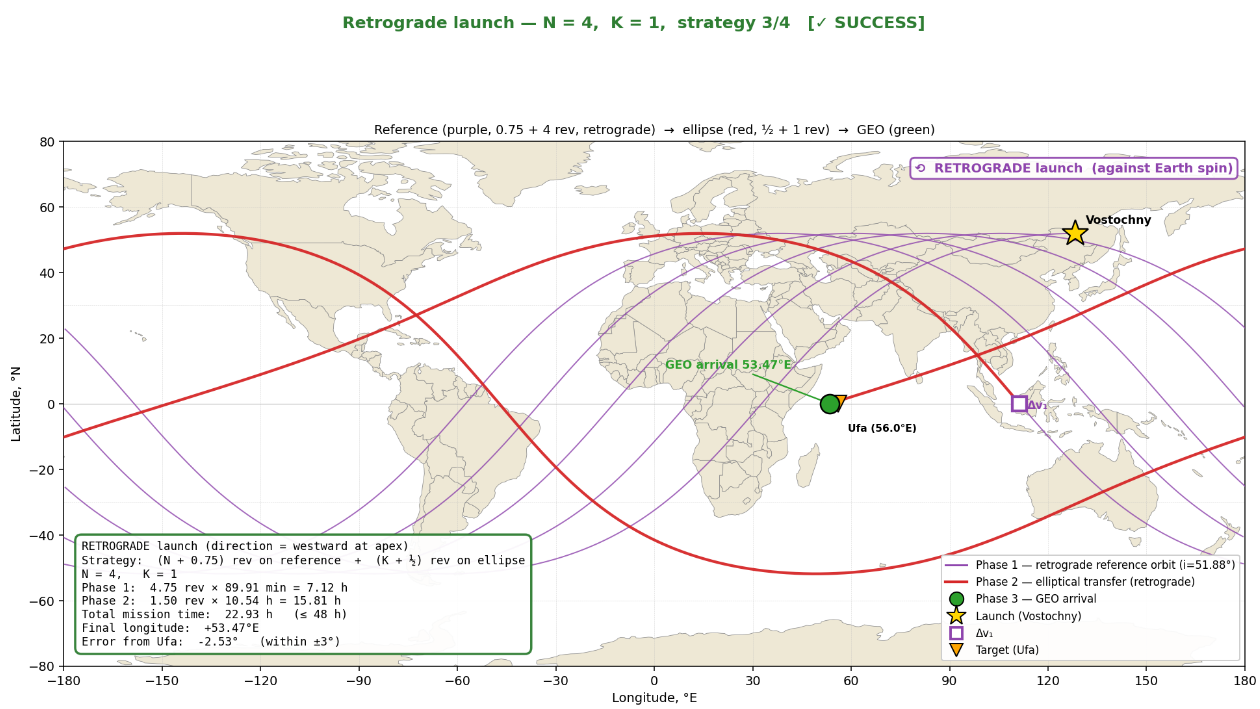


Рис. 7: Решение №3. Ретроградный запуск, $n = 4,\ k = 1$. $\Delta T \approx 22.9$ ч, конечная долгота $53.5°$ в. д.

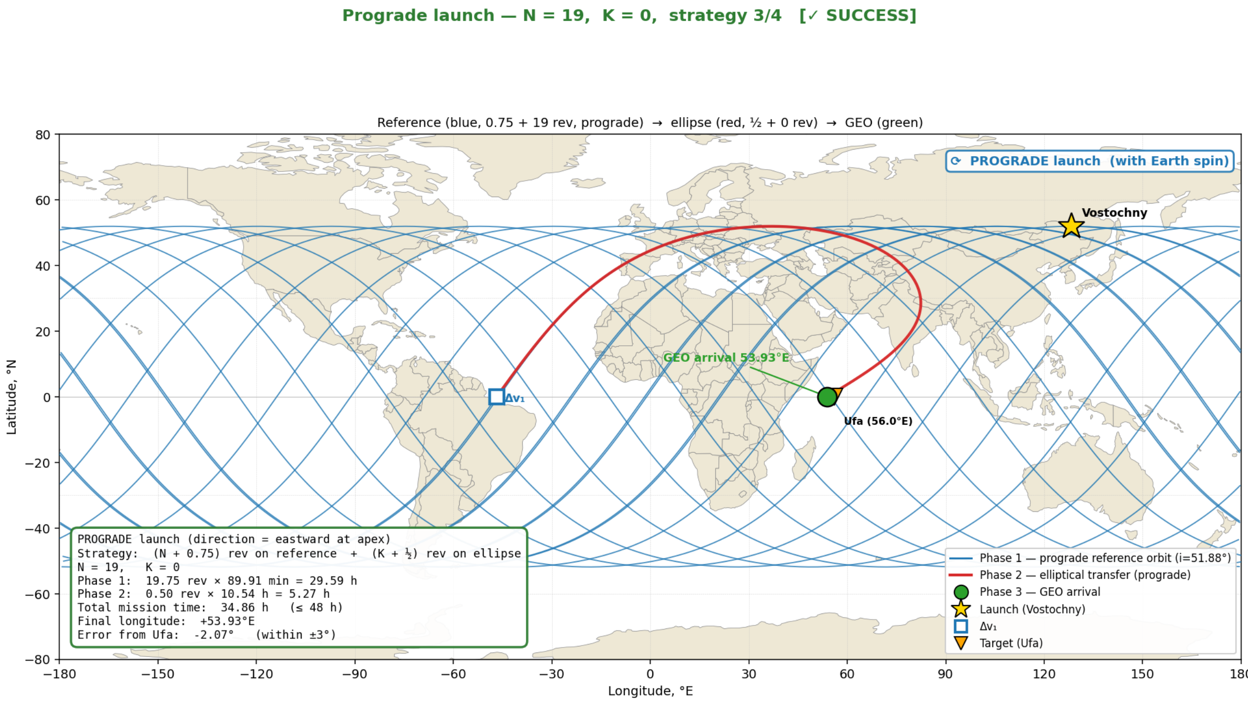


Рис. 8: Решение №4. Прямой запуск, $n = 19,\ k = 0$. $\Delta T \approx 34.9$ ч, конечная долгота 53.9° в. д.

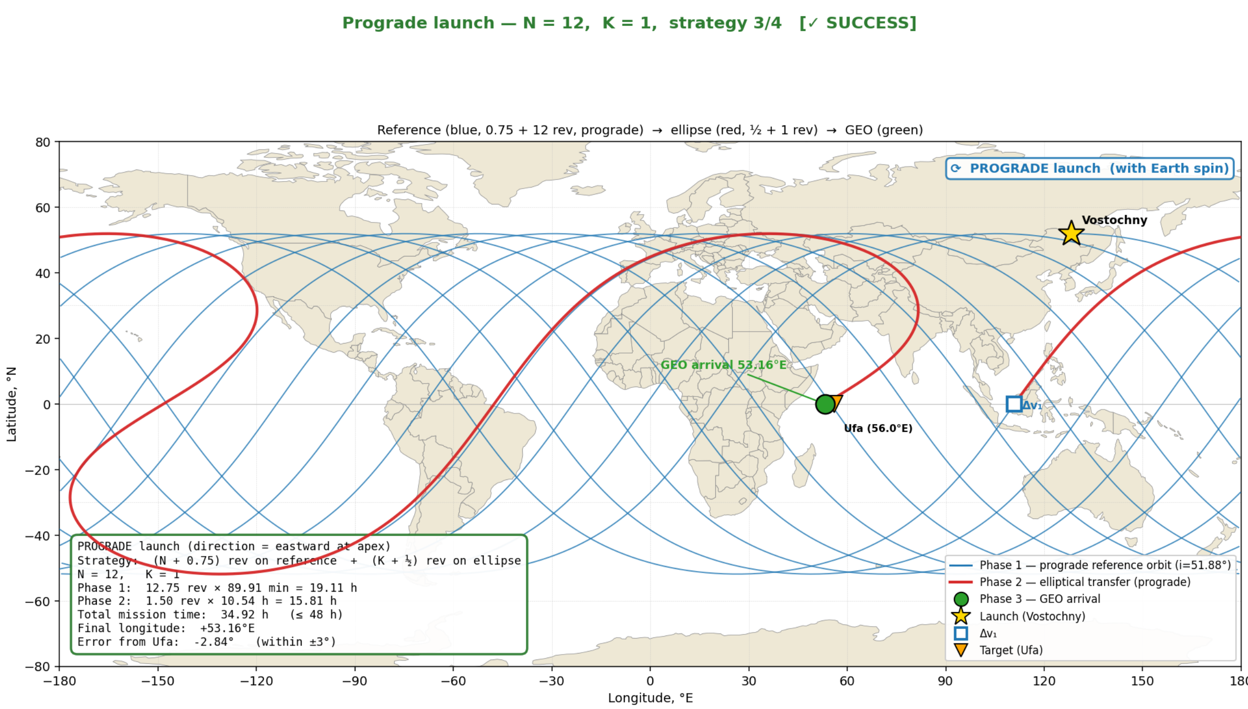


Рис. 9: Решение №5. Прямой запуск, $n = 12,\ k = 1$. $\Delta T \approx 34.9$ ч, конечная долгота 53.2° в. д.

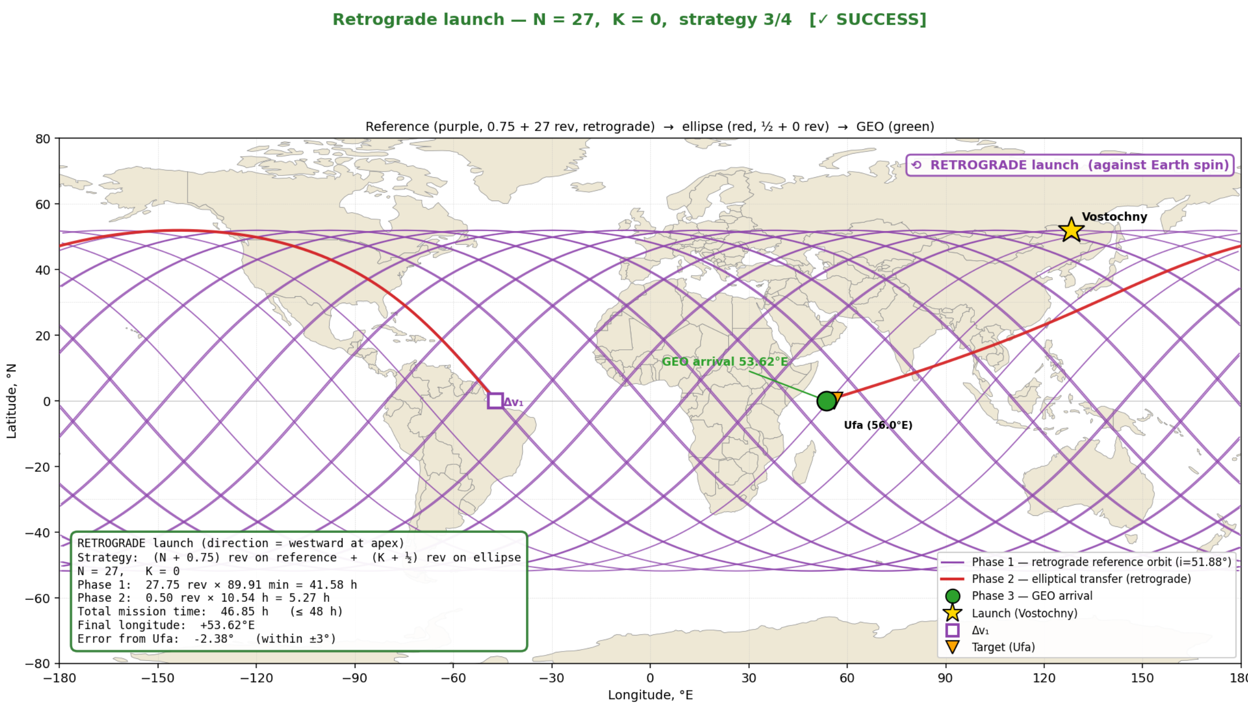


Рис. 10: Решение №6. Ретроградный запуск, $n = 27,\ k = 0$. $\Delta T \approx 46.9$ ч, конечная долгота 53.6° в. д.