# 1. Далеко до той планеты?

**1.1.** 20 марта некоторого года в некотором месте на поверхности Земли *внешняя планета* взошла в $t_1$ по местному времени. Её заход произошёл в $t_2$ по местному времени. Известно, что в эти сутки *планета* кульминировала на высоте $h$. Найдите экваториальные координаты *планеты* в предположении, что планеты Солнечной системы имеют круговые орбиты, лежащие в плоскости эклиптики.

▷ Пренебрежём видимым смещением планеты за половину суток. Верхняя кульминация планеты наблюдалась около 18 часов по местному времени, с хорошей точностью через 6 часов после полудня. Следовательно, планета находится [практически] в точке летнего солнцестояния:

$$\alpha = \boxed{6^{\mathrm{h}};} \qquad \delta = +\varepsilon \approx \boxed{+23.5^\circ.}$$

*3 балла*

**1.2.** Укажите возможную широту места наблюдения.

▷ По известным высоте верхней кульминации и склонению рассчитываем широту $\varphi$:

$$h = 90^\circ - |\varphi - \delta| \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \boxed{\delta \pm (90^\circ - h).}$$

В ответе необходимо указать физически осмысленный результат с учётом нахождения планеты над горизонтом в течение более половины суток.

*2 балла*

**1.3.** Вычислите геоцентрическое расстояние $r$ *планеты* и выразите его в астрономических единицах, километрах и световых минутах.

▷ Угол *Солнце – Земля – планета* прямой: $r = \boxed{\sqrt{a_{\text{пл}}^2 - a_\oplus^2}.}$

*0.5 × 3 = 1.5 балла*

**1.4.** Найдите элонгацию Земли при наблюдении с *планеты*.

▷ Угол *Солнце – Земля – планета* прямой: $\gamma = \boxed{\arcsin \dfrac{a_\oplus}{a_{\text{пл}}}.}$

*1 балл*

**1.5.** Как скоро (с даты описываемых событий) Земля и *планета* сблизятся на наименьшее расстояние?

▷ При наблюдении с Солнца угол между Землёй и планетой составляет $90^\circ - \gamma$, поэтому Земля обгоняет планету на $360^\circ - (90^\circ - \gamma) = 270^\circ + \gamma$. Искомый промежуток времени

$$\tau = \frac{270^\circ + \gamma}{\omega_\oplus - \omega_{\text{пл}}} = \frac{270^\circ + \gamma}{360^\circ}\left(\frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_{\text{пл}}}\right)^{-1} = \boxed{\frac{270^\circ + \arcsin\frac{a_\oplus}{a_{\text{пл}}}}{360^\circ} \cdot \frac{T_{\text{пл}} T_\oplus}{T_{\text{пл}} - T_\oplus}.}$$

*2.5 балла*

## 2. Оптическая кулинария

**2.1.** Определим зону жизни как область вокруг звезды, для которой установившаяся средняя температура планеты находится в пределах от 0°С до 100°С. Пусть вокруг звезды главной последовательности радиусом $R$ с температурой поверхности $T$ на внутренней границе зоны жизни обращается небольшая абсолютно чёрная планета. Определите радиус $r$ её орбиты.

▷ Запишем уравнение теплового баланса для планеты: $\dfrac{4\pi R^2\sigma T^4}{4\pi r^2}\cdot\pi R_{\text{пл}}^2 = 4\pi R_{\text{пл}}^2\sigma T_{\text{пл}}^4$.
С подстановкой $T_{\text{пл}} = T_{\max} = 373$ К радиус орбиты планеты

$$r = \boxed{\frac{1}{2}R\left(\frac{T}{T_{\max}}\right)^2.}$$ *2.5 балла*

**2.2.** Найдите видимую болометрическую звёздную величину $m$ звезды при наблюдении с планеты.

▷ Отношение освещённостей, создаваемых звездой на планете и Солнцем на Земле, есть

$$k = \frac{R^2}{R_\odot^2}\frac{T^4}{T_\odot^4}\frac{r_\oplus^2}{r^2}.$$

Используем формулу Погсона ($m_\odot$ — видимая болометрическая звёздная величина Солнца):

$$m = m_\odot - 2.5\lg k = \boxed{m_\odot - 2.5\lg\frac{R^2}{R_\odot^2}\frac{T^4}{T_\odot^4}\frac{r_\oplus^2}{r^2}.}$$ *2.5 балла*

**2.3.** Используя соотношение масса – светимость $L \propto M^4$ для звёзд главной последовательности, вычислите период обращения планеты вокруг звезды.

▷ Масса звезды $M = M_\odot\sqrt[4]{\dfrac{L}{L_\odot}} = M_\odot\sqrt[4]{\dfrac{R^2}{R_\odot^2}\dfrac{T^4}{T_\odot^4}} = M_\odot\sqrt{\dfrac{R}{R_\odot}}\dfrac{T}{T_\odot}$.
По известным массе звезды и радиусу орбиты вычислим период (3-й закон Кеплера):

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_\odot}\sqrt{\frac{R_\odot}{R}}\frac{T_\odot}{T}}.}$$ *2.5 балла*

**2.4.** На поверхности планеты установлен телескоп с эффективным диаметром объектива $D$ и фокусным расстоянием $F$. Если навести этот телескоп на звезду, какова будет освещённость $E$ её изображения в фокальной плоскости телескопа?

▷ Угловой радиус звезды при наблюдении с планеты $\rho \simeq R/r$, поэтому диаметр изображения звезды в фокальной плоскости $d = 2\rho F = 2FR/r$. На изображение приходится весь световой поток, собранный входной апертурой:

$$E = \frac{L}{4\pi r^2}\frac{\pi D^2}{4}\bigg/\frac{\pi d^2}{4} = \frac{4\pi R^2\sigma T^4}{4\pi r^2}\left(\frac{Dr}{2FR}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}\frac{D^2}{F^2}\sigma T^4.}$$ *2.5 балла*

# 3. Тёмная ночь…

**3.1.** Рассмотрите область на поверхности Земли, при наблюдении с которой диск Солнца сейчас пересекает горизонт. Найдите долю, которую площадь этой области составляет от площади всей земной поверхности. При выполнении этого задания Землю считайте идеальным шаром, наличием у неё атмосферы пренебрегите.

▷ Данная область полосой окружает терминатор как большой круг, содержащий точки, для которых диск Солнца лежит точно на горизонте. Для наблюдателя в центре Земли эта полоса имеет угловую полуширину $\rho_\odot$ — видимый угловой радиус Солнца; её пространственная ширина $l = 2\pi R_\oplus \cdot 2\rho_\odot / 360°$. Оценим площадь полосы как площадь боковой поверхности цилиндра. Искомая доля есть

$$\frac{2\pi R_\oplus l}{4\pi R_\oplus^2} = \frac{l}{2R} = \boxed{\pi \frac{\rho_\odot}{180°}.}$$

*3 балла*

**3.2.** Определите широту $\varphi_m$ самой северной точки указанной области в текущий момент времени (27 марта 2020 года). Весеннее равноденствие в 2020 году наступило 20 марта в 03:49 UT.

▷ С момента весеннего равноденствия (утро 20 марта UT) прошло $7-8$ суток. Вблизи равноденствий склонение Солнца за сутки изменяется на $1° \cdot \sin\varepsilon \simeq 0.4°$, поэтому можно ожидать сегодня $\delta_\odot \simeq 0.4° \times (7 \div 8) = 2.8° \div 3.2° \approx 3°$. На такое угловое расстояние от Северного полюса Земли удалена самая северная точка терминатора. Искомая широта выше на полуширину полосы:

$$\varphi_m = 90° - \delta_\odot + \rho_\odot = 90° - (2.8° \div 3.2°) + 0.25° \simeq \boxed{87.0° \div 87.5°.}$$

*2 балла*

**3.3.** Через какой минимальный промежуток времени с момента весеннего равноденствия 2020 года точка из предыдущего вопроса окажется на южной границе указанной области? Орбиту Земли считайте круговой.

▷ Это произойдёт, когда широта самой северной точки терминатора окажется равной $\varphi_m + \rho_\odot = 90° - \delta_\odot + 2\rho_\odot = 87.2° \div 87.8°$, что случится незадолго до момента осеннего равноденствия. В условиях круговой орбиты между последовательными «разноимёнными» равноденствиями проходит полгода. Вычислим искомый промежуток времени:

$$\frac{365.24 \text{ сут.}}{2} - \frac{90° - (87.2° \div 87.8°)}{0.4°/\text{сут.}} \simeq \boxed{(175.6 \div 177.1) \text{ сут.}}$$

*3 балла*

**3.4.** Продолжительность дня (как части суток, в течение которой какая-либо часть Солнца находится над горизонтом) сегодня в некоторой точке Земли составила $\tau$. Оцените астрономический азимут $A$ точки, в которой верхний край диска Солнца на восходе коснулся горизонта.

▷ День короткий — речь о высоких широтах Южного полушария. Суточная параллель Солнца недалеко отстоит от экватора и почти параллельна плоскости горизонта. Верхняя кульминация происходит на севере, а восход — на северо-востоке, поэтому $A - 180° \simeq \tau/2$;

$$A \simeq \boxed{180° + \tau \times 7.5°/h.}$$

*2 балла*

# 4. Затмения в системе Юпитера

**4.1.** Рассмотрите систему Юпитер – некий спутник радиусом $R_{\text{сп}}$. Найдите максимально возможный радиус $r$ орбиты спутника, при котором на Юпитере могут наблюдаться полные затмения Солнца этим спутником. Орбита спутника лежит в плоскости экватора Юпитера, направление движения спутника совпадает с направлением вращения Юпитера.

▷ В предельном случае угловые размеры спутника и Солнца при наблюдении с «поверхности» Юпитера (в афелии!) должны совпасть:

$$\frac{R_{\text{сп}}}{r - R_{♃}} = \frac{R_{\odot}}{a_{♃}(1 + e_{♃})} \quad \Longrightarrow \quad r = \boxed{\frac{R_{\text{сп}} a_{♃}}{R_{\odot}}(1 + e_{♃}) + R_{♃}.}$$

*3 балла*

**4.2.** Вычислите скорость движения спутника по такой орбите.

▷ Круговая скорость: $v = \boxed{\sqrt{\frac{GM_{♃}}{r}}.}$ *1 балл*

**4.3.** Оцените продолжительность такого затмения (от начала до окончания частной фазы) для экваториального наблюдателя в день весеннего равноденствия при условии, что максимум затмения пришёлся на местный полдень.

▷ На расстоянии, равном длине конуса тени, размер полутени равен удвоенному размеру спутника. Линейная скорость точек экватора Юпитера $v_{\text{экв}} = 2\pi R_{♃}/T_{♃}$, $T_{♃}$ — период вращения Юпитера вокруг своей оси. Тогда искомая продолжительность

$$\tau \approx \boxed{\frac{4R_{\text{сп}}}{|v - v_{\text{экв}}|}.}$$

*4 балла*

**4.4.** На каком угловом расстоянии $\beta$ от Юпитера спутник наблюдается с Сатурна, если Юпитер при наблюдении с Сатурна находится в максимальной восточной элонгации?

▷ Угол *Солнце – Юпитер – Сатурн* прямой. $\beta = \boxed{\frac{r}{\sqrt{r_{♄}^2 - r_{♃}^2}}.}$ *2 балла*

# 5. Дистанционное просвещение$^{(8–9)}$

**5.1.** Рассмотрите двойную звёздную систему, годичный параллакс компонентов которой составляет $p$. Суммарная видимая звёздная величина компонентов системы $m$, при этом одна из звёзд ярче другой в $k$ раз. Определите видимые звёздные величины компонентов системы.

▷ Суммарная освещённость больше освещённости от более тусклой звезды в $(k+1)$ раз. По формуле Погсона

$$m_{\text{тускл}} = m + 2.5\lg(k+1);$$
$$m_{\text{ярк}} = m_{\text{тускл}} - 2.5\lg k = m + 2.5\lg\frac{k+1}{k}.$$

*1.5 × 2 = 3 балла*

**5.2.** Вычислите абсолютные звёздные величины компонентов системы.

▷ По определению:

$$M_{\text{тускл}} = m_{\text{тускл}} + 5 - 5\lg d\,(\text{пк}) = m_{\text{тускл}} + 5 + 5\lg p\,('');$$
$$M_{\text{ярк}} = m_{\text{ярк}} + 5 + 5\lg p\,('').$$

*1 × 2 = 2 балла*

**5.3.** Наблюдатель находится между компонентами системы на соединяющей их прямой и утверждает, что эти светила имеют равную видимую звёздную величину. Найдите эту звёздную величину. Расстояние между звёздами составляет $a$ пк.

▷ Из закона обратных квадратов следует, что точка расположения наблюдателя делит отрезок, соединяющий звёзды, в отношении, обратно пропорциональном корням из их визуальных светимостей: $a = l_{\text{ярк}} + l_{\text{тускл}}$; $l_{\text{ярк}}/l_{\text{тускл}} = \sqrt{k}$. Тогда $l_{\text{ярк}} = a\sqrt{k}/(\sqrt{k}+1)$, $l_{\text{тускл}} = a/(\sqrt{k}+1)$, и по рассчитанным ранее абсолютным звёздным величинам находим

$$m' = M_{\text{ярк}} - 5 + 5\lg l_{\text{ярк}}\,(\text{пк}) = m + 2.5\lg\frac{k+1}{k} + 5\lg p\,('') + 5\lg a\,(\text{пк}) + 5\lg\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1} =$$
$$= \boxed{m + 2.5\lg(k+1) + 5\lg p\,('') + 5\lg a\,(\text{пк}) - 5\lg\left(\sqrt{k}+1\right).}$$

*2 балла*

**5.4.** На какое максимальное расстояние может сместиться наблюдатель, чтобы его утверждение не утратило свою справедливость?

▷ Геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух заданных точек есть постоянная $\neq 1$, — это окружность. Наиболее удалённая от исходной точки точка окружности находится на прямой по другую сторону от более тусклой звезды. Исходное расстояние до неё $l_1 = l_{\text{тускл}}$, конечное $l_2 = a/(\sqrt{k}-1)$; перемещение

$$l_1 + l_2 = \boxed{a\left(\frac{1}{\sqrt{k}+1} + \frac{1}{\sqrt{k}-1}\right).}$$

*3 балла*

# 5. Пыльное небо$^{(10-11)}$

**5.1.** Зарегистрированная звёздная величина некоторой звезды на высоте $h_1$ составила $m_1$. После того, как высота звезды уменьшилась до $h_2$, её звёздная величина увеличилась до $m_2$. Определите внеатмосферную звёздную величину этой звезды в модели оптически однородной атмосферы.

▷ Зенитные расстояния достаточно малы, чтобы считать атмосферу плоской. Используем «закон секансов» ($A$ — поглощение в зените):

$$m_i = m_0 + \frac{A}{\sin h_i} \quad \Longrightarrow \quad m_0 = \frac{m_1 \sin h_1 - m_2 \sin h_2}{\sin h_1 - \sin h_2}. \qquad \textit{2 балла}$$

**5.2.** На высоте $h_3$ звёздная величина того же светила составила $m_3$. В модели тонкой сферической оптически однородной атмосферы оцените толщину $H$ последней.

▷ Величина поглощения в зените $A = (m_i - m_0)\sin h_i$ — на высоту атмосферы. На высоте $h_3$ луч зрения пронизывает толщу атмосферы длиной $l$, для которой по теореме косинусов справедливо:

$$(R_\oplus + H)^2 = R_\oplus^2 + l^2 - 2R_\oplus l \cos(90^\circ + h_3).$$

С другой стороны, из величины поглощения на этой высоте $l = H \cdot (m_3 - m_0)/A$. Подстановка приводит к уравнению относительно $H$:

$$2R_\oplus + H = H\left(\frac{m_3 - m_0}{A}\right)^2 + 2R_\oplus \frac{m_3 - m_0}{A} \sin h_3 \quad \Longrightarrow \quad H = 2R_\oplus \frac{1 - \dfrac{m_3 - m_0}{A}\sin h_3}{\left(\dfrac{m_3 - m_0}{A}\right)^2 - 1}. \qquad \textit{3 балла}$$

**5.3.** Какова оптическая толщина атмосферы в заданной модели при наблюдениях вблизи горизонта?

▷ Оптическая толщина $\tau$ соответствует ослаблению в $e^\tau$ раз. Вблизи горизонта имеем путь луча в атмосфере $l_{\text{гор}} = \sqrt{(R_\oplus + H)^2 - R_\oplus^2}$, что соответствует величине поглощения $\Delta m_{\text{гор}} = A l_{\text{гор}}/H$. Следовательно,

$$\tau_{\text{гор}} = \ln\left(10^{0.4\Delta m_{\text{гор}}}\right) = \boxed{0.4 \ln 10 \cdot A \frac{\sqrt{(R_\oplus + H)^2 - R_\oplus^2}}{H}.} \qquad \textit{2 балла}$$

**5.4.** Оцените коэффициент $\sigma$ поглощения атмосферы в расчёте на одну молекулу.

▷ Оптическая толщина $\tau = n\sigma l$, откуда $\sigma = \tau_{\text{гор}}/(n l_{\text{гор}})$. Концентрацию оценим как

$$n = \frac{N}{4\pi R_\oplus^2 H} = \frac{p_0 \cdot 4\pi R_\oplus^2}{4\pi R_\oplus^2 H} \cdot \frac{1}{m_0 g} = \frac{p_0 N_A}{\mu g H} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 0.4 \ln 10 \cdot \frac{\mu g A}{p_0 N_A}. \qquad \textit{3 балла}$$

# 6. О жизни протуберанца(8–9)

**6.1.** Сидерический экваториальный период вращения Солнца на экваторе $T_{\text{экв}} = 24.5$ сут. Вычислите синодический экваториальный период вращения Солнца.

▷ Из уравнения синодического движения $T'_{\text{экв}} = \dfrac{1}{\frac{1}{T_{\text{экв}}} - \frac{1}{T_{\oplus}}}$, где $T_{\oplus}$ — земной год. *3 балла*

**6.2.** Вследствие вращения Солнца из-за лимба «выглянул» протуберанец. Через $t$ часов его стало видно целиком. Считая, что протуберанец находится на солнечном экваторе и неизменен со временем, определите его высоту $h$.

▷ Протуберанец видно целиком, когда видно его «основание» (на поверхности Солнца). Проводя аналогию с понижением горизонта, заключим, что Солнце доворачивается на угол $\gamma = \omega'_{\text{экв}} t = \arccos \frac{R_{\odot}}{R_{\odot}+h}$, то есть искомая высота

$$h = R_{\odot}\left(\frac{1}{\cos \omega'_{\text{экв}} t} - 1\right) = \boxed{R_{\odot}\left(\frac{1}{\cos\left(360^{\circ} \cdot t / T'_{\text{экв}}\right)} - 1\right).}$$ *3 балла*

**6.3.** Пусть протуберанец находится на широте $\varphi$. Какова высота протуберанца в этом случае, если зависимость угловой скорости вращения Солнца от широты аппроксимируется выражением

$$\omega\ (^{\circ}/\text{сут.}) = 14.71^{\circ} - 2.40^{\circ} \cdot \sin^2 \varphi - 1.79^{\circ} \cdot \sin^4 \varphi?$$

▷ Солнце должно довернуться на больший угол, чем было нужно в случае экваториального протуберанца: видимость протуберанца определяется дугой большого круга — угловым расстоянием от «основания» протуберанца до границы видимой поверхности Солнца, в то время как движется протуберанец вдоль параллели — малого круга. Поскольку широта всё ещё не очень высокая, оценим угол «доворота» как $\gamma = \omega' t = \arccos \frac{R_{\odot}}{R_{\odot}+h} / \cos\varphi$, откуда

$$h = R_{\odot}\left(\frac{1}{\cos\left[\omega' t \cos\varphi\right]} - 1\right) = \boxed{R_{\odot}\left(\frac{1}{\cos\left[\left(\omega - \frac{360^{\circ}}{T_{\oplus}}\right) t \cos\varphi\right]} - 1\right).}$$ *4 балла*

# 6. Две весёлые ракеты$^{(10-11)}$

**6.1.** Две ракеты имеют одинаковый удельный импульс двигателя $u$. У первой ракеты масса топлива составляет $\alpha_1$ от начальной массы, у второй — $\alpha_2$. Как соотносятся конечные скорости ракет $v_2/v_1$ при разгоне из состояния покоя в отсутствие внешних воздействий?

▷ По формуле Циолковского $v_i = u_i \ln \dfrac{m_{\text{нач},\,i}}{m_{\text{кон},\,i}} = u_i \ln \dfrac{m_{\text{нач},\,i}}{m_{\text{нач},\,i}(1-\alpha_i)} = -u_i \ln(1-\alpha_i)$.

При равных удельных импульсах двигателя ($u_1 = u_2 = u$) искомое соотношение равно

$$\frac{v_2}{v_1} = \boxed{\frac{\ln(1-\alpha_2)}{\ln(1-\alpha_1)}}.$$

*3 балла*

**6.2.** Предположим, $i$-я ракета сначала разгоняется до некоторой скорости, а затем тормозит до полной остановки. Вычислите максимальную скорость $v_m$, которую ракета могла бы развить при таком движении. Потерей топлива на разворот ракеты пренебрегите.

▷ Ракета движется вдоль прямой, иначе топливо тратилось бы не только на разгон-торможение, но и на поворот вектора скорости. Из формулы Циолковского следует, что

$$m_i = m_{\text{нач},\,i} \cdot \exp\left(-\frac{\Delta v}{u}\right),$$

где $\Delta v$ — величина изменения скорости ракеты. Максимальная скорость $v_m$ достигается при полном исчерпании топлива к моменту остановки:

$$(1-\alpha_i)m_{\text{нач},\,i} = m_{\text{нач},\,i} \cdot \exp\left(-\frac{v_m}{u}\right) \cdot \exp\left(-\frac{v_m}{u}\right) \quad \Longrightarrow \quad v_m = \boxed{-\frac{1}{2}u\ln(1-\alpha_i).}$$

*3 балла*

**6.3.** Какую долю $\beta_m$ от исходной массы $j$-й ракеты составляла бы её масса к моменту достижения скорости $v_m$?

▷ Вновь из формулы Циолковского следует, что

$$\beta_m = \exp\left(-\frac{v_m}{u}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1-\alpha_i)\right) = \boxed{\sqrt{1-\alpha_i}.}$$

*1.5 балла*

**6.4.** В течение какого промежутка времени $k$-я ракета смогла бы «зависнуть» на небольшой высоте над поверхностью Земли в отсутствие атмосферы?

▷ Условие равновесия ракеты — равенство реактивной и гравитационной сил: $\mu u = mg$, где $\mu = -\Delta m/\Delta t$ — расход топлива, откуда $\frac{\Delta m}{m} = -\frac{g}{u}\Delta t$. С другой стороны, вне гравитационного поля по второму закону Ньютона $ma = \mu u$, что с учётом $a \equiv \Delta v/\Delta t$ приводит к уравнению $\frac{\Delta m}{m} = -\frac{\Delta v}{u}$. Поскольку левые части уравнений совпадают, приравняем правые, а затем от приращений перейдём к конечным величинам:

$$t = \frac{v_{\text{кон},\,k}}{g} = \frac{u}{g}\ln\frac{m_{\text{нач},\,k}}{m_{\text{кон},\,k}} = \boxed{-\frac{u}{g}\ln(1-\alpha_k).}$$

*2.5 балла*

# 7. Триангулятор[(10-11)]

**7.1.** В таблице приводятся экваториальные координаты трёх ярких звёзд ночного неба Земли на эпоху 2000.0: $\{(\alpha_i, \delta_i)_{i=1,\dots,3}\}$. Вычислите попарные угловые расстояния между этими тремя звёздами.

▷ Воспользуемся сферической теоремой косинусов для треугольника *светило $i$ – светило $j$ – Северный полюс мира:*

$$\cos\rho_{ij} = \cos(90^\circ - \delta_i)\cos(90^\circ - \delta_j) + \sin(90^\circ - \delta_i)\sin(90^\circ - \delta_j)\cos(\alpha_i - \alpha_j);$$

$$\rho_{ij} = \boxed{\arccos\left[\sin\delta_i \sin\delta_j + \cos\delta_i \cos\delta_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)\right].}$$

*0.5 × 3 = 1.5 балла*

**7.2.** Найдите площадь $S$ сферического треугольника, образованного этими тремя светилами. Ответ выразите в стерадианах и квадратных градусах.

▷ Площадь $S$ (в стерадианах) равна сферическому избытку $\varepsilon$ (в радианах). Для расчёта последнего необходимо вычислить углы рассматриваемого треугольника, используя сферическую теорему косинусов. Напротив дуги $\rho_{ij}$ лежит угол

$$\gamma_{ij} = \arccos\frac{\cos\rho_{ij} - \cos\rho_{ik}\cos\rho_{jk}}{\sin\rho_{ik}\sin\rho_{jk}}.$$

Искомая площадь (в стерадианах) $S = \varepsilon = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - \pi$. При переводе в квадратные градусы используется тот факт, что 1 ср $= (180^\circ/\pi)^2 \simeq 3282.8\ \square^\circ$.

*3 + 1 = 4 балла*

**7.3.** Найдите угол, который образуют между собой большие круги, содержащие дуги *светило $i$ – светило $j$* и *светило $j$ – светило $k$.*

▷ Это и есть найденный ранее угол $\gamma_{ik}$ или дополнительный к нему. *1.5 балла*

**7.4.** Определите минимальный радиус $P$ круглого поля зрения, при котором в этом поле одновременно могут наблюдаться все три светила.

▷ По существу ищем угловой радиус описанной окружности для заданного сферического треугольника. Заметим, что эта описанная окружность является одновременно описанной окружностью для *плоского* треугольника, образованного теми же вершинами.

Отрезки – стороны плоского треугольника являются хордами, стягивающими дуги – стороны соответствующего сферического треугольника. Полагая радиус небесной сферы равным 1, вычислим длины отрезков: $l_i = 2\sin(\rho_i/2)$.

Радиус описанной окружности плоского треугольника есть $R = l_1 l_2 l_3/(4S)$, где $S$ — площадь плоского треугольника, которую можно рассчитать по формуле Герона:

$$R = \frac{1}{4}\frac{l_1 l_2 l_3}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \qquad p \equiv \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} \text{ — полупериметр.}$$

Диаметр описанной окружности плоского треугольника — хорда, стягивающая диаметр описанной окружности соответствующего сферического треугольника, откуда искомый радиус

$$P = \arcsin R.$$

*3 балла*