1. Без тени сомнений

В году есть периоды, когда Международная космическая станция в течение значительного промежутка времени (более суток) непрерывно освещена Солнцем. Какова максимально возможная продолжительность такого промежутка? В какие дни года такая ситуация возможна?

▷ Будем рассматривать угол β между плоскостью орбиты МКС и направлением на Солнце. Нетрудно найти (если не руками, то в интернете), что

$$\sin\beta = \cos\delta_\odot \sin i \sin(\Omega - \alpha_\odot) + \sin\delta_\odot \cos i,$$ *1 балл*

где $\alpha_\odot$ и $\delta_\odot$ — соответственно прямое восхождение и склонение Солнца, Ω — прямое восхождение восходящего узла орбиты спутника, i — наклонение орбиты спутника. При $|\sin\beta| \geqslant \sin\beta_0$ Солнце будет освещать спутник постоянно, причём β_0, очевидно, есть видимый угловой радиус Земли:

$$\beta_0 = \arcsin\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}.$$ *2 балла*

Очевидно, наибольшая продолжительность промежутка достигается при достижении максимально возможного $|\beta_{\max}| = \varepsilon + i$ — вблизи солнцестояния при совпадающем «подъёме» орбиты:

$$\cos\varepsilon \sin i \sin(\Omega - \alpha_\odot) + \sin\varepsilon \cos i = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}.$$

Период прецессии узлов орбиты МКС составляет 2 месяца, поэтому для оценки будем считать, что $\Omega = 6\tau$, $\alpha_\odot = 6^{\mathrm{h}}$:

$$\cos\varepsilon \sin i \cos 6\tau + \sin\varepsilon \cos i = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}.$$

Последнее уравнение имеет корни $\tau = \pm 2.54°$, откуда искомая максимальная продолжительность промежутка $2\tau/360° \times 365.25$ сут. $=$ $\boxed{5.2\text{ сут.}}$ *3 балла*

Заметим, что

$$\cos\delta_\odot \sin i \sin(\Omega - \alpha_\odot) + \sin\delta_\odot \cos i \leqslant \cos\delta_\odot \sin i + \sin\delta_\odot \cos i = \sin(\delta_\odot + i),$$

то есть минимальный модуль склонения Солнца $|\delta_\odot|_{\min} = \arcsin\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} - i \simeq 18.6°$. *2 балла*

Это соответствует $365.25/360° \times \arccos 18.6/\varepsilon \simeq$ $\boxed{\text{38 дням от солнцестояния.}}$ *2 балла*

2. Дискобол

Вокруг звезды главной последовательности массой $\mathfrak{M} = 1.4\mathfrak{M}_\odot$ обращается стабильный оптически толстый пылевой диск с внутренним радиусом $r = 1$ а. е., внешним радиусом $R = 2r$ и постоянной толщиной $h = r/10$. Оцените полную светимость этого диска и его абсолютную звёздную величину.

▷ Для оценки можно считать, что всё излучение, попадающее на обращённую к звезде поверхность диска, поглощается. В равновесии мощность поглощённого диском излучения равна мощности излучения самого диска: *2 балла*

$$L_D = \frac{2\pi r h}{4\pi r^2} L,$$ *2 балла*

где L — мощность излучения звезды; её оценим как $L \simeq (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot)^4 L_\odot$. *2 балла*

Светимость диска

$$L_D = \frac{h}{2r}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot}\right)^4 L_\odot = \frac{0.1}{2} \times 1.4^4 \cdot L_\odot \simeq 0.192 L_\odot \simeq \boxed{7.4 \cdot 10^{25}\ \text{Вт.}}$$ *2 балла*

Сравнивая диск с Солнцем по формуле Погсона находим

$$M_D = M_\odot - 2.5\lg\frac{L_D}{L_\odot} = 4.7 - 2.5\lg\frac{h}{2r} - 10\lg\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot} = 4.7 - 2.5\lg 0.05 - 10\lg 1.4 \simeq \boxed{6.5^{\text{m}}.}$$ *2 балла*

3. Три планеты

24 марта 2020 года произошло сразу два знаменательных астрономических события: наибольшая западная элонгация Меркурия и наибольшая восточная элонгация Венеры. Оцените, через какое минимальное время эта ситуация повторится, то есть максимальные элонгации Меркурия и Венеры будут наблюдаться с интервалом не более 3 суток. Орбиты планет считайте круговыми и лежащими в плоскости эклиптики.

▷ Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вокруг Солнца вместе с Землёй. В этой системе между наибольшими восточной и западной элонгациями Меркурий проходит по орбите

$$\beta_1 = 2\arccos\frac{a_1}{a_\oplus} = 2\arccos 0.3871 = 2.347 \text{ рад};$$

Венера —

$$\beta_2 = 2\arccos\frac{a_2}{a_\oplus} = 2\arccos 0.7233 = 1.524 \text{ рад}.$$

Синодические угловые скорости Меркурия и Венеры составляют соответственно

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T_\oplus} = \frac{2\pi}{87.97\text{ сут.}} - \frac{2\pi}{365.26\text{ сут.}} = 0.05422 \text{ рад/сут.};$$
$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} - \frac{2\pi}{T_\oplus} = \frac{2\pi}{224.70\text{ сут.}} - \frac{2\pi}{365.26\text{ сут.}} = 0.01076 \text{ рад/сут.}$$

Ситуация повторится, когда Меркурий и Венера вновь одновременно будут в наибольших элонгациях (по условию — любых). Возможны 4 варианта:

$$\omega_1 t = 2\pi n_1, \quad \omega_2 t = 2\pi n_2; \qquad n_1 = 126, \quad n_2 = 25; \qquad t = 14600 \text{ сут.}$$
$$\omega_1 t + \beta_1 = 2\pi n_1, \quad \omega_2 t = 2\pi n_2; \qquad n_1 = 81, \quad n_2 = 16; \qquad t = 9343 \text{ сут.}$$
$$\omega_1 t = 2\pi n_1, \quad \omega_2 t - \beta_2 = 2\pi n_2; \qquad n_1 = 102, \quad n_2 = 20; \qquad t = 11820 \text{ сут.}$$
$$\omega_1 t + \beta_1 = 2\pi n_1, \quad \omega_2 t - \beta_2 = 2\pi n_2; \qquad n_1 = 52, \quad n_2 = 10; \qquad t = 5982 \text{ сут.}$$

Наименьший промежуток времени соответствует, как видно, наступлению противоположных максимальных элонгаций. Это случится через $\boxed{16.4 \text{ года.}}$

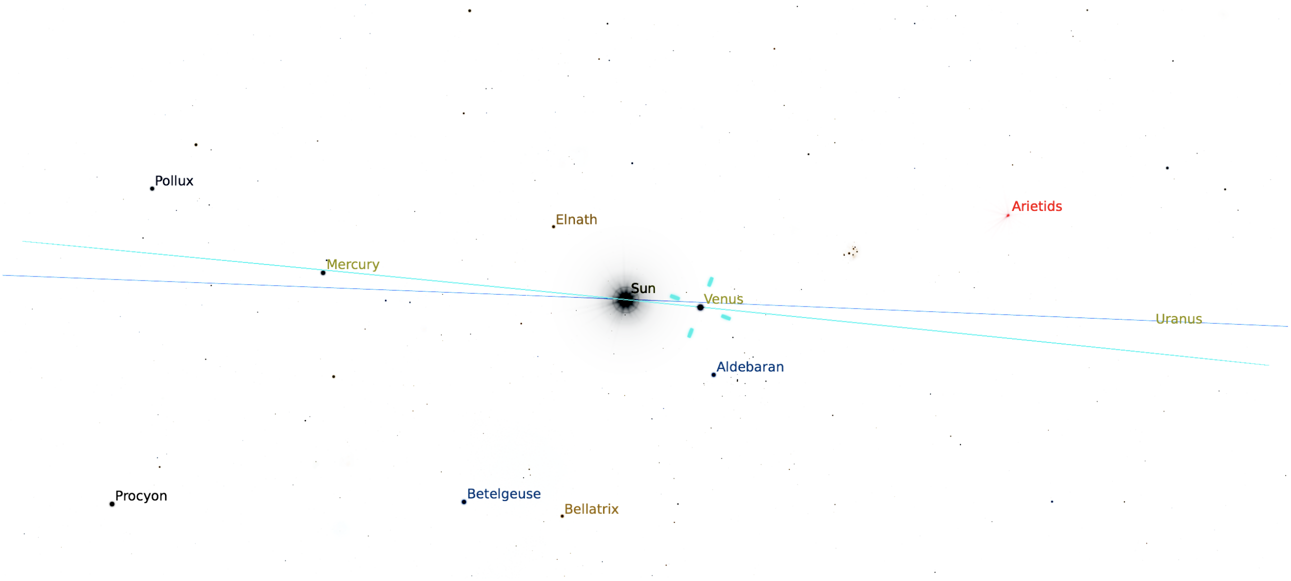
☐ Схема оценивания:

- метод расчёта → 3 балла;
- рассмотрение всех случаев → 1/3/5/6 баллов;
- правильный ответ → 1 балл.

4. Мне только спросить!

На каком минимальном угловом расстоянии от Поллукса Венера может находиться 7 июня?

⊳ 7 июня эклиптическая долгота Солнца ≃ долготе восходящего узла Венеры $\lambda_0 = 76.7°$.* Значит, можно считать, что земной наблюдатель в этот день находится в плоскости орбиты Венеры. 07.06.2020 это выглядит так (циан — видимая орбита Венеры, синий — эклиптика):



Угол между орбитой Венеры и эклиптикой равен в таком случае наклонению орбиты Венеры к эклиптике $i = 3.394°$.

Эклиптические координаты Поллукса: $\lambda = 113.5°$, $\beta = +6°41'$.

Угловое расстояние до орбиты Венеры оценим в плоском приближении:

$$\gamma = \beta \cos i - (\lambda - \lambda_0) \sin i \simeq \boxed{4.9°.}$$

В реальности такое сближение будет, например, в 2042 году.

☐ Схема оценивания:

- $\gamma = \beta$ (нулевое наклонение орбиты) → 3 балла;
- $\gamma = \beta - i$ (Венера не связана со своей орбитой) → 2 балла;
- $\gamma = 0$ (изолированный факт: макс. эклиптическая широта Венеры > β) → 3 балла;
- учёт прецессии узлов орбиты Венеры без учёта прецессии оси Земли и наоборот → не более 5 баллов.

*Вблизи этой даты возможны летние прохождения Венеры по диску Солнца.

5. Делай кассу

Фильм «Марсианин» (2015) начинается с того, как земная экспедиция Ares III попадает в бурю.[†] Деталь, оторванная ветром и врезавшаяся в человека, уносит его на значительное расстояние. Оцените это расстояние, исходя из реальных данных об атмосфере Марса, а также максимальную силу давления ветра, которую человек может испытать на Марсе.

▷ Сила давления ветра

$$F = K \cdot \frac{\rho v^2}{2} S,$$ *2 балла*

где S — характерная площадь человека, K — аэродинамический коэффициент, ρ и v — соответственно плотность и скорость газа.

Для человека $K \approx 1$, $S \approx 1$ м^2. Плотность атмосферы $\rho \approx 0.02$ кг/м^3, максимальные скорости ветра $v_{\max} \approx 100$ м/с. *2 балла*

$$F \approx \frac{\rho v^2}{2} S \approx \frac{0.02 \times 100^2}{2} \approx 100 \text{ Н}.$$ *2 балла*

Можно рассматривать различные механизмы передачи импульса от детали к человеку, которые в сущности сводятся к следующей оценке. Время падения человека высотой $h \sim 2$ м

$$t \sim \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{hR_{\male}^2}{G\mathfrak{M}_{\male}}};$$ *2 балла*

а характерный импульс силы $p \sim Ft$ соответствует дальности полёта *1 балл*

$$L \sim \frac{p}{m} t \sim \frac{Ft^2}{m} = \frac{F}{m} \frac{hR_{\male}^2}{G\mathfrak{M}_{\male}} \approx \frac{100 \times 2}{70 \times 0.378 \times 9.81} \boxed{\sim 1 \text{ м.}}$$ *1 балл*

По существу отлётом это не является.

[†] https://www.youtube.com/watch?v=MPD3Jq57SKw

6. Чёрное дело

Сравните мощность излучения гравитационных волн системой Солнце – Земля с мощностью излучения абсолютно чёрного тела, имеющего максимум излучения на той же длине волны, с характерным размером, равным размеру системы. Какой промежуток времени потребовался бы для «нагрева» гравитационного излучения системы на 1 градус за счёт потерь энергии на это излучение?

▷ Мощность излучения гравитационных волн составляет

$$P_G = \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{\mathfrak{M}_\odot^2\mathfrak{M}_\oplus^2(\mathfrak{M}_\odot+\mathfrak{M}_\oplus)}{a_\oplus^5} \simeq \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{\mathfrak{M}_\odot^3\mathfrak{M}_\oplus^2}{a_\oplus^5} = \frac{32}{5}\left(\frac{v_\oplus}{c}\right)^5\left(\frac{\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{M}_\odot}\right)^2\cdot\frac{v_\oplus^5}{G} \simeq$$
$$\simeq 6.4\times\left(10^{-4}\right)^5\times\left(3.3\cdot10^5\right)^{-2}\times\left(29.7\cdot10^3\right)^5/6.67\cdot10^{-11}\ [\text{СИ}] \sim 200\ \text{Вт}.$$

1 балл

Частота излучения гравитационных волн вдвое превосходит орбитальную частоту, поэтому

$$\lambda_G = \frac{c}{f_G} = \frac{c}{2f_{\text{орб}}} = \frac{cT_\oplus}{2} = 0.5\ \text{св. года} = 4.73\cdot10^{15}\ \text{м}.$$

2 балла

Температура АЧТ с максимумом излучения на λ_G в соответствии с законом Вина есть

$$T = \frac{b}{\lambda_G} = \frac{2b}{cT_\oplus} = \frac{2.898\cdot10^{-3}\ \text{м}\cdot\text{К}}{4.73\cdot10^{15}\ \text{м}} \simeq 6.13\cdot10^{-19}\ \text{К},$$

2 балла

а излучаемая АЧТ с такой температурой и размером $a_\oplus = 1$ а.е. мощность

$$P_R \sim a_\oplus^2\sigma T^4 = \left(1.496\cdot10^{11}\right)^2\times5.67\cdot10^{-8}\times\left(6.13\cdot10^{-19}\right)^4 \sim 2\cdot10^{-58}\ \text{Вт}.$$

2 балла

Считать АЧТ шаром (ответ в π раз больше), кубом (— в 6 раз) и т. п. допустимо. Видим, что мощность гравитационного излучения на 60 порядков (!) больше. *1 балл*

В случае «нагрева» излучения на 1 градус $T' \simeq 1$ К, откуда $\lambda \sim 3$ мм. Очевидно, система Солнце – Земля не может существовать с такой малой длиной гравитационной волны (большая полуось заведомо её меньше), то есть ответ: такого не может быть. *2 балла*